Универзитет “Св.Кирил и Методиј”-Скопје

Природно-математички факултет

Институт за математика

Анализа на осетливост и Параметарско Линеарно Програмирање

(примена во Wyndor Glass Co. задачата)

Семинарска работа по предмет

Математичко програмирање 2

Ментор:

Проф. д-р Марија Оровчанец

Доц. д-р Ирена Стојковска

Изработил:

Елена Стевковска

Јануари, 2015

Содржина

ВОВЕД

Линеарното програмирање е подкласа од оптимизациони задачи во кое функцијата и ограничувањата се линеарни.

Линеарниот модел за примарната задача и нејзината дуална задача изгледа вака:

Примарна задача

Maximize $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

со ограничувањата

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$ за $i = 1, 2, \ldots, m$

и

$x_j \geq 0,$ за $j = 1, 2, \ldots, n.$

Дуална задача

Minimize $W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

со ограничувањата

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,$ за $j = 1, 2, \ldots, n$

и

$y_i \geq 0,$ за $i = 1, 2, \ldots, m.$

Векторски облик

Примарна задача

Maximize $Z = \mathbf{cx},$

со ограничувањата

$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$

и

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$

Дуална задача

Minimize $W = \mathbf{yb},$

со ограничувањата

$\mathbf{yA} \geq \mathbf{c}$

и

$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$

Матричен облик

Денес, линеарното програмирање е една од најкористените „алатки“ за донесување одлуки во индрустијата и во различни аспекти на производството. За решавање на (големи) проблеми со линеарно програмирање потребна е поголема компјутерска меморија и капацитет. Ова е една од причините за големиот научен труд посветен на развивање на побрзи алгоритми.

Во поново време формулирањето на проблемите од линеарно програмирање се проширило во проблеми со параметризација, и тоа анализа на осетливост и параметарско линеарно програмирање.

Параметарското линеарно програмирање и анализата на осетливост се научни дисциплини за тоа како оптималните својства зависат од параметризацијата на податоците. Овие научни дисциплини се стари речиси колку самото поле на линеарно програмирање. Тие датираат од времето на Gaas Saaty и Mills , кои живееле во средината на педесетите години.

. Анализата на осетливост вклучува менување на еден параметар во оригиналниот модел за да се провери ефектот врз оптималното решение. За разлика , параметарското линеарно програмирање (ПЛП) , вклучува менување на повеќе параметри истовремено. Ова програмирање може да обезбеди корисно проширување на анализата за осетливост. На пример, да го провери ефектот на поврзаните парметри кои се менуваат заедно поради некој фактор (на пример: состојбата на економијата). Уште поважна примена на ПЛП е истражувањето на така наречените „размени“ во параметрите. На пример ако c_j го претставува профитот од некоја активност, може да се зголемат некои од c_j вредностите за цена на намалување некои соодветни вредности (смена на персоналот или опремата). Слично ако b_j вредностите ги преставуваат количините на соодветни ресурси кои ни се достапни, може да се зголемат некои од нив, а некои да се намалат.

Во некои примени на ПЛП , главната цел е да се одредат соодветните „размени“ меѓу два основни фактори (пр. трошоците и придобивките). Обично еден од овие фактори се изразува во функцијата на цел (на пример се минимизираат трошоците) , а другите се вклучуваат во ограничувањата.

Параметарското линеарно програмирање има примена во :

- менаџирање на трошоци (Cohon, 1979)
- планирање на флоти (Choo & Atkins, 1982)
- контрола на предвидување на модели (Galperin & Jimenez, 2001)
- процесот на синтеза (Magnanti & Orlin, 1988)
- распоредување на проблеми (Martin, 1975)
- правење распоред (Bulletin, 2013 ; Sharma , 2007)

Голем број истражувања во овие области довеле до изводливи решенија со помош на параметарското линеарно програмирање.

Оригиналната Wyndor Glass Co. задача

Компанијата Wyndor Glass Co. произведува висококвалитетни производи од стакло, вклучувајќи прозори и стаклени врати. Таа има три фабрики. Во првата фабрика се изработуваат алуминиумски рамки и оков, во втората дрвени рамки и во третата се произведува стаклото и се составуваат производите.

Заради намалувањето на приходите, менаџментот на компанијата одлучил да ги преработи производните линии. Да се прекинат непрофитабилните производи за да се ослободат производните капацитети, и да се лансираат два нови производи кои имаат голем продажен потенцијал:

Производ 1: Стаклена врата со алуминиумска рамка (висока 8ft=2.4 метри)

Производ 2: Двокрилен прозор со дрвена рамка (4x6 ft = 1.2x1.8 метри)

Производ 1 бара производен капацитет од првата и третата фабрика, а Производ 2 од втората и третата фабрика. Одделот за маркетинг заклучил дека компанијата може да продаде онолку производи колку што ќе произведе во овие фабрики. Сепак, и двата производи се “натпреваруваат“ за производен капацитет во третата фабрика, па не е јасно колку парчиња од Производ 1 , а колку од Производ 2 би требало да се производат за да се максимизира профитот.

Затоа се формирал тим кој ќе го проучи овој проблем.

Овој тим најпрво разговарал со менаџментот на компанијата за да ги увиди нивните цели. И дошле до следната дефиниција на задачата:

Одлучи која ќе биде производната стапка на секој од производите т.е. колкав ќе биде бројот на парчиња од Производ 1, а колкав на Производ 2 така што ќе се максимизира профитот, а ограничувањата ќе бидат одредени од производните капацитети во трите фабрики. Секој производ ќе се произведува во серија од 20 парчиња, па производната стапка ќе биде дефинирана од бројот на серии произведени за една недела. Секоја комбинација на производните стапки која ги задоволува ограничувањата е дозволена, вклучувајќи да не се произведе воопшто еден од двата производи , а на сметка на тоа да се произведе колку што е можно од другиот.

Исто така, тимот одредил и кои информации е потребно да се соберат:

1. Бројот на часови достапни неделно во секоја од фабриките за производство на новите производи. (Поголемиот дел од времето, трите фабрики се посветени на старите производи , па временскиот капацитет за новите е доста ограничен.)

2. Бројот на часови потребни неделно во секоја од фабриките за производство на секоја серија од новите производи.

3. Профитот од една серија за секој од производите.

Собраните информации се претставени во следната табела:

Фабрика	Потребно време за производство на една серија (неделно, во часови) — Производ 1	2	Достапно време за производство на една серија (неделно, во часови)
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Профит од една серија	\$3,000	\$5,000	

Овој проблем (задача) се решава со помош на линеарно програмирање.

Формулација на Wyndor Glass Co. ЛП задачата

За да го формулираме математичкиот (ЛП) модел за оваа задача, нека

x_1 е бројот на серии на Производ 1 , произведени за една недела

x_2 е бројот на серии на Производ 2, произведени за една недела

Z е тоталниот профит , остварен за една недела (во долари) од производство на двата производи.

Ја добиваме задачата:

$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$, така што

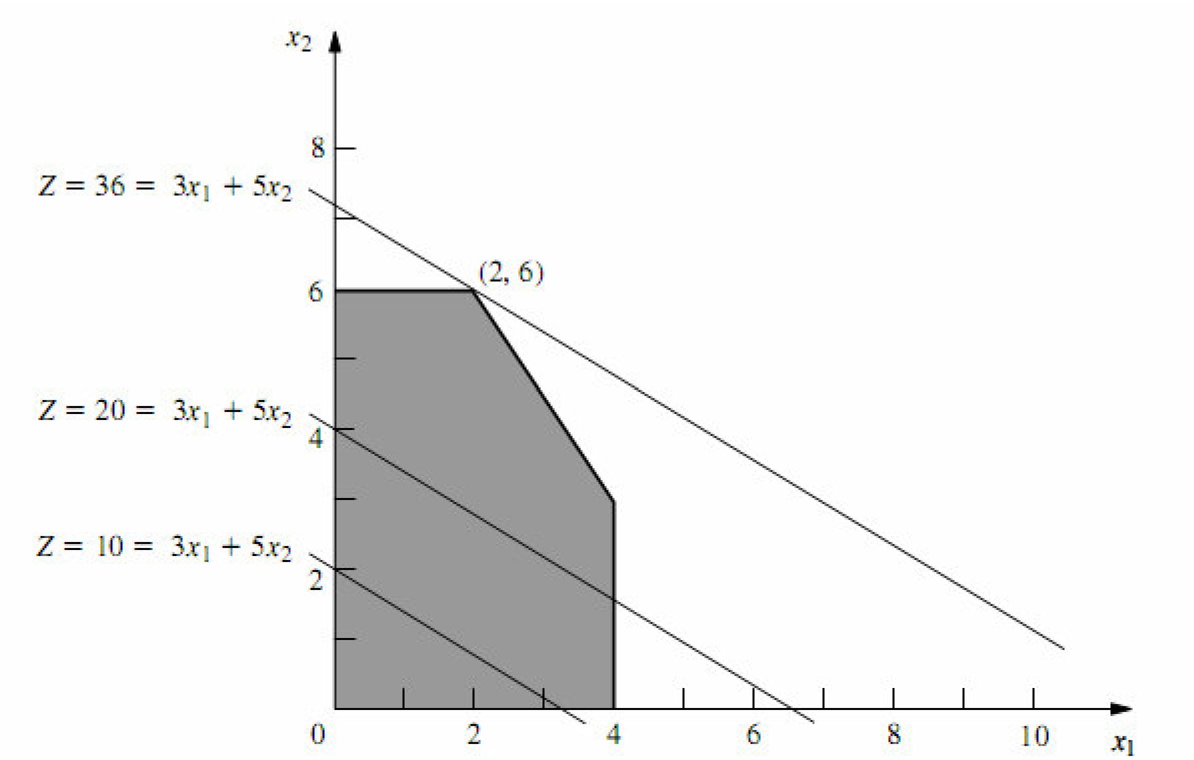
$x_1 \le 4$

$2x_2 \le 12$

$3x_1 + 2x_2 \le 18$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Геометриско решение на задачата



Се добива следното оптималното решение : x_1=2, x_2=6, за кои функцијата на цел Z=36. Тоа значи дека компанијата треба да произведе две серии од Производ 1 и шест серии од Производ 2 неделно, и ќе оствари профит од 36.000 долари. За овој модел ниедна друга комбинација од двата производи нема да биде попрофитабилна.

Решение добиено со Симплекс методот

За да ја решиме Wyndor Glass Co. задачата со симплекс методот , со внесување на нови променливи, ја доведуваме во следниот облик:

Maximize $\quad Z$,

со ограничувањата

$$
\begin{array}{llr}
(0) & Z - 3x_1 - 5x_2 & = 0 \\
(1) & x_1 \quad + x_3 & = 4 \\
(2) & 2x_2 \quad + x_4 & = 12 \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 & = 18
\end{array}
$$

и

$x_j \geq 0, \quad$ за $j = 1, 2, \ldots, 5.$

Со користење на симплекс методот, ја добиваме следната симплекс таблица:

Итерација	Базична променлива	Р-ка	Коефициентот на: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Десна страна
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	−1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

И со двата метода се добива истото оптималното решение : $x_1=2$, $x_2=6$, за кои функцијата на цел Z=36. Тоа значи дека компанијата треба да произведе две серии од Производ 1 и шест серии од Производ 2 неделно, и ќе оствари профит од 36.000 долари. За овој модел ниедна друга комбинација од двата производи нема да биде попрофитабилна.

Сепак, тимот не треба да се задоволи само со едно решение за првобитниот модел. Моделот треба дополнително да се тестира и анализира. Еден од начините да се направи тоа е примена на анализата на осетливост и параметарското линеарно програмирање.

Анализа на осетливост

Работата на тимот кој работи на еден математички модел , не е ни скоро готова со наоѓање на оптималното решение за првобитниот модел. Параметрите во математичкиот модел се константи кои често се претпоставки добиени од тимот кој ја истражувал задачата (количината на достапните ресурси, бројот на вработени и сл.). Донесувањето одлуки е составен дел од оперативниот менаџмент, но сепак можно е некогаш некои параметри да се преценат или пак подценат. Затоа, корисно е за донесувачот на одлуки да има назнаки за тоа колку е осетлив проблемот при промена на една или повеќе од вредностите на неговите параметри.

За жал не е можно да се разгледаат сите можни комбинации на параметрите во еден проблем. Затоа, постојат некои алатки со чија помош донесителот на одлуки ќе ја процени осетливоста на проблемот. Една од нив е анализата на осетливост.

Успешно донесената одлука се состои од повеќе чекори, а првиот и најважниот е моделирањето на задачата, бидејќи за различен модел може да добиеме различни решенија. Анализата на осетливост нуди подобро разбирање на проблемот, на влијанието на промената на ограничувањата и „што ако“ прашањето.

Анализата на осетливост всушност претставува согледување на ефектот од менување на параметрите во функцијата на цел и ограничувањата, врз оптималното решение.

Промената на некои од параметрите може:

- да не влијае воопшто на оптималното решение
- да влијае на допустливоста на оптималното решение, т.е. да влијае на тоа дали оптималното решение ќе ги задоволува ограничувањата
- да даде ново решение

Со менување на некои од параметрите во првобитниот модел, во функцијата на цел или ограничувањата, ако добиеме ново решение, мора да провериме дали ги задоволува ограничувањата и дали е оптимално. При примена на анализата на осетливост ги тестираме сите параметри (a_{ij}, b_i, c_j) одделно.

Анализа на осетливост во Wyndor Glass Co. задачата

Откако тимот кој работи на Wyndor Glass Co. задачата ќе го добие првото оптимално решение, со помош на графичкиот или пак симплекс методот, тој треба да направи дополнителни истражувања и да размисли дали може да промени некои од параметрите на задачата.

Да претпоставиме дека Производ 1 ќе го продаваат за поголема цена и со тоа профитот од секоја серија сега ќе биде 4000 долари. Потоа со зголемување на бројот на вработени во третата фабрика, бројот на потребни часови за изработка на првиот производ ќе се намали на 2 часа неделно. И на крај со зголемување на производните капацитети во втората фабрика, бројот на достапни часови ќе се зголеми на 24.

Па тогаш задачата го добива следниот облик:

Првобитниот модел

Maximize $Z = [3,\ 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

со ограничувањата

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

и

$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$.

Ревидираниот модел

Maximize $Z = [4,\ 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

со ограничувањата

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

и

$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$.

Ревидираната задача која ќе ја добиеме после промената на параметрите не мора да ја решаваме повторно со симплекс методот туку со помош на трансформациите од следната табела директно можеме да ја добиеме новата ревидирана симплекс таблица:

	Р-ка	Коефициенти: Z	Коефициенти: Оригинални променливи	Коефициенти: Нови променливи	Десна страна
Нова првобитна таблица	(0)	1	$-\bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{0}$	0
	$(1, 2, \ldots, m)$	$\mathbf{0}$	$\bar{\mathbf{A}}$	$\mathbf{I}$	$\bar{\mathbf{b}}$
Ревидирана финална таблица	(0)	1	$\mathbf{z}^* - \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{y}^*\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{c}}$	$\mathbf{y}^*$	$Z^* = \mathbf{y}^*\bar{\mathbf{b}}$
	$(1, 2, \ldots, m)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{A}^* = \mathbf{S}^*\bar{\mathbf{A}}$	$\mathbf{S}^*$	$\mathbf{b}^* = \mathbf{S}^*\bar{\mathbf{b}}$

Каде $\bar{c}, \bar{b}$ и $\bar{A}$ се новите вредности на параметрите. А y* и S* се матриците од вредностите на новите вметнати променливи во примарниот модел. Во нашата задача,

$$\bar{\mathbf{c}} = [4, 5], \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{y}^* = [0, \tfrac{3}{2}, 1], \quad \mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ги применуваме трансформациите:

$$\mathbf{z}^* - \bar{\mathbf{c}} = [0, \tfrac{3}{2}, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - [4, 5] = [-2, 0], \quad Z^* = [0, \tfrac{3}{2}, 1] \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = 54,$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

И ја добиваме следната табела:

	Базична променлива	Р-ка	Коефициенти						Десна страна
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Нова првобитна таблица	Z	(0)	1	−4	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	24
	x_5	(3)	0	2	2	0	0	1	18
Финална таблица за оригиналниот модел	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
Ревидирана финална таблица	Z	(0)	1	−2	0	0	$\frac{3}{2}$	1	54
	x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	6
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
	x_1	(3)	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	−2

Следно , по добивање на ревидираната финална таблица за да можеме да го прочитаме новото базично решение, со Гаусова елиминација ќе ја доведеме во следниот правилен облик, каде секоја базична променлива во i-тиот ред има коефициент 1, и коефициент 0 во сите други редови:

	Базична променлива	Р-ка	Коефициенти						Десна страна
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Ревидирана финална таблица	Z	(0)	1	-2	0	0	$\frac{3}{2}$	1	54
	x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	6
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
	x_1	(3)	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-2
Нормален облик	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	2	48
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3

Новото решение е : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-3,12,7,0,0)$ кое не е изводливо бидејќи излегува надвор од ограничувањата, но сепак може да се искористи како влезно базично решение за симплекс методот на дуалната задача, бидејќи таму е допустливо т.е. не излегува надвор од ограничувањата (ова можеме да го видиме од нормалниот облик на ревидираната финална таблица, бидејќи во редот (0) сите променливи се ненегативни).

Алгоритам за анализа на осетливост

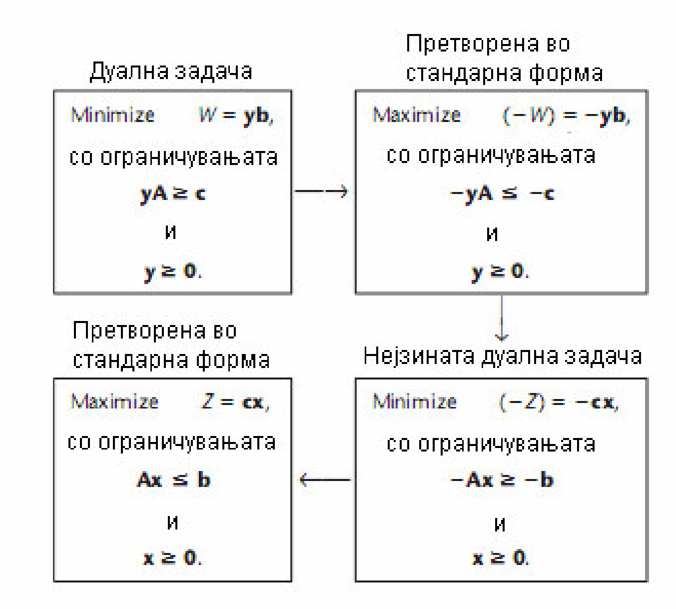
1. Ревидирај го моделот: Направи ги саканите промени на параметрите кои сакаш да ги истражиш.
2. Ревидирај ја финалната таблица на првобитниот модел
3. Ревидираната финална таблица доведи ја во нормален облик со помош на Гаусовите елиминации
4. Провери дали новодобиеното решение ги задоволува ограничувањата.
5. Провери дали новото решение е оптимално т.е. дали коефициентите на сите небазични променливи во редот (0) се ненегативни
6. Ако решението не ги задоволува ограничувањата и не е оптимално, (ако сакаш) можеш да го искористиш за добивање на ново решение, користејќи го повторно симплек методот или дуалниот симплекс метод.

Примена на анализата на осетливост

- Промени во параметрите b_i
  Пример за Wyndor Glass Co. , промена на еден од параметрите b_i:
  $$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}.$$
  , или промена на повеќе од параметрите b_i оддеднаш:
  $$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}.$$
- Промени во коефициентите на небазичните променливи:
  $$c_1 = 3 \longrightarrow \overline{c}_1 = 4, \qquad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \overline{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
- Промени во коефициентите на базичните променливи:
  $$c_2 = 5 \longrightarrow \overline{c}_2 = 3, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \overline{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
- Внесување на нова променлива (заради вклучување на некоја нова активност во моделот)
- Внесување на ново ограничување

Улогата на дуалноста во анализата на осетливост

Менувањето на параметрите во примарната задача , прави промени и во дуалната задача на моделот. Затоа, можеме да избереме дали ќе работиме со примарната или дуалната задача. Но, бидејќи тие се тесно поврзани, лесно можеме да преминеме од примарната задача на дуалната, и обратно.



Во некои случаи подобро е да ја анализираме дуалната задача, за полесно да го увидиме ефектот од промените врз примарната задача. Ова е препорачливо во следните два случаи:

-Промени во коефициентите на небазичните променливи.

Бидејќи променливата не е базична, не се менува допустливоста на решението, т.е. не се менува тоа дали решението ги задоволува ограничувањата, но може да дојде до промена на оптималноста на решението. Прашањето за оптималноста на решението во примарната задача е еквивалентно на прашањето за допустливоста на решението во дуалната задача. Па полесно е само да провериме дали новото оптимално решение (добиено по промена на некои од параметрите) ги задоволува ограничувањата во дуалната задача.

-Додавање на нова променлива.

Во некои модели, првобитно можно да се изоставaт некои активности бидејќи ни изгледаат помалку важни од другите. Па можно е да се запрашаме дали вметнувањето на нови активности ќе го смени оптималното решение. Вметнувањето на нова активност во моделот , значи додавање на нова променлива во функцијата на цел или ограничувањата во примарната задача, или додавање на уште едно ограничување во дуалната задача.

Повторно, бидејќи прашањето за оптималноста на решението во примарната задача е еквивалентно на прашањето за допустливоста на решението во дуалната задача, полесно е да провериме дали новото оптимално решение ги задоволува ограничувањата во дуалната задача.

Параметарско линеарно програмирање

До сега опишавме како можеме да испитаме конкретни промени на параметрите во моделот. Кога работиме со големи задачи, полесно е наместо да ги испитуваме сите конкретни вредности на параметрите, да ги испитаме промените во одредени интервали со примена на Параметарското линеарно програмирање.

На пример при промена на параметрите b_i во Wyndor Glass Co. задачата наместо да ги тестираме конкретните промени од $b_2 = 12$ до $\bar{b}_2 = 24$, можеме да земеме

$\bar{b}_2 = 12 + \theta$ и да го менуваме θ од 0 до 12.

Систематски промени во параметрите Cj

Во случај кога параметрите C_j се менуваат функцијата на цел на обичната ЛП задача, и

max $z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$,

така што $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, за i=1,2,…m

и $x_j \geq 0$ за j=1,2,..n.

се заменува со:

max $z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + \alpha_j \theta_j) x_j$,

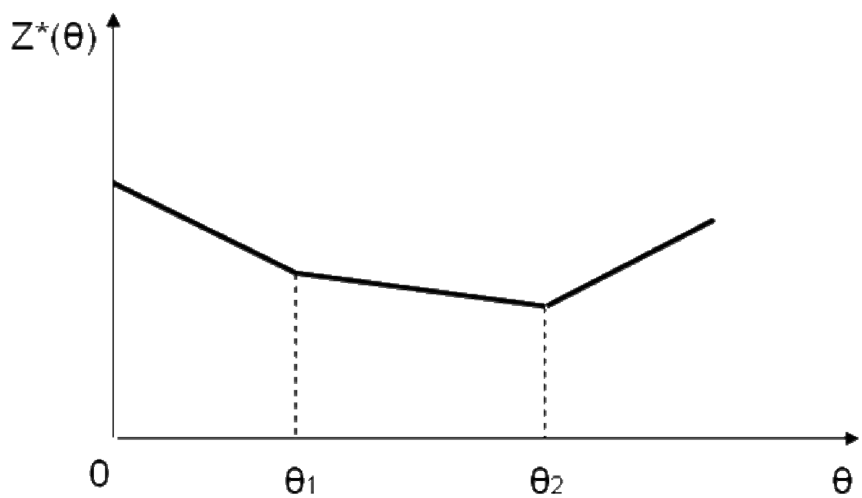
така што $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ за i=1,2,…m

и $x_j \geq 0$ за j=1,2,..n.

каде α_j се дадени влезни константи кои ги претставуваат релативните чекори во кои коефициентите ќе бидат сменети. Затоа, постепено зголемувајќи го θ почнувајќи од нула , ги менуваме коефициентите во овие релативни чекори.

Вредностите доделени на α_j можат да претставуваат истовремени промени на параметрите C_j за систематска анализа на осетливоста на ефектот од зголемување на големината на овие промени. Тие исто така можат да бидат базирани на тоа како коефициентите можат заедно да се сменат во однос на некој фактор мерен со θ. Овој фактор може да биде и неконтролиран (на пр. Бројот на персонал и опрема се преместува од една активност на друга).За секоја дадена вредност на θ, оптималното решение на соодветниот проблем од линеарно програмирање може да се добие со користење на симплекс методот. Ова решение може да биде веќе добиено за оригиналниот проблем каде θ=0.

Сепак, целта е да се најде оптималното решение на модифицираниот проблем од линеарно програмирање како функција од θ.
Затоа во процедурата на барање на решението треба да можеме да утврдиме кога и како се менува оптималното решение (ако се менува) кога θ се менува почнувајќи од нула до некој одреден позитивен број.



Вредноста на функцијата на цел за оптималното решение како функција од θ за параметарско линеарно програмирање со систематски промени во параметрите C_j .

Овој график покажува како Z*(θ) вредноста на функцијата на цел за оптималното решение (за дадено θ) се менува кога θ расте (се менува).

Всушност, Z*(θ) секогаш ја има оваа линеарна и конвексна форма.

Соодветното оптимално решение се менува (кога θ расте) само за вредностите на θ каде наклонот на функцијата Z*(θ) се менува.

На тој начин овој график отсликува проблем каде три различни решенија се оптимални за различни вредности на θ, првото за $0 \leq \theta \leq \theta_1$, второто за $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ и третото за $\theta \geq \theta_2$. Бидејќи вредноста на секое x_j останува иста во секој од овие интервали за θ, вредноста на $Z^*(\theta)$ се менува со θ само затоа што коефициентите пред x_j се менуваат како линеарна функција од θ.

Процедурата за барање решение се базира директно на анализата за осетливоста за истражување на промените во параметрите c_j.

Единствена основна разлика кај параметарското линеарно програмирање е тоа што променливите сега се изразени во однос на θ, а не во однос на некој одреден број.

Промени во параметрите c_j кај задачата Wyndor Glass Co.

Оригиналната Wyndor Glass Co. задача која детално е разгледана погоре е:

$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$, така што

$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Или во обликот:

Maximize Z,

со ограничувањата

$$
\begin{array}{llr}
(0) & Z - 3x_1 - 5x_2 & = 0 \\
(1) & x_1 + x_3 & = 4 \\
(2) & 2x_2 + x_4 & = 12 \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 + x_5 & = 18
\end{array}
$$

и

$x_j \geq 0,$ за $j = 1, 2, \ldots, 5.$

И неговата симплекс табилица:

Итерација	Базична променлива	Р-ка	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Десна страна
			Коефициентот на:						
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	−1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Да претпоставиме дека релативните чекори за оригиналната Wyndor Glass Co. задача се $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = -1$, така што го добиваме моделот:

Max $Z(\theta) = (3 + 2\theta)x_1 + (5 - \theta)x_2$,

со истите ограничувања:

$x_1 \leq 4$

$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Почнувајќи со крајната симплекс таблица за θ=0 , гледаме дека

(0) $z + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36$.

Првично би ги имале овие промени во оригиналните (θ=0) коефициенти додадени во него на левата страна:

(0)$z - 2\theta x_1 + \theta x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36$.

Бидејќи и x_1 и x_2 се базични променливи , тие треба да бидат елиминирани од (0).

$$z - 2\theta x_1 + \theta x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36$$

2θ по (3)

$-\theta$ по (2)

---

(0) $z + \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{6}\theta\right)x_4 + \left(1 + \frac{2}{3}\theta\right)x_5 = 36 - 2\theta$

Тестот за оптималност вели дека моменталното решение ќе остане оптимално се додека овие коефициенти на небазичните променливи останат ненегативни:

$$\frac{3}{2} - \frac{7}{6}\theta \geq 0 \text{ за } 0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$$

$$1 + \frac{2}{3}\theta \geq 0, \qquad \forall\, \theta \geq 0$$

Затоа, откако θ ќе се зголеми до $\theta = \frac{9}{7}$, x_4 ќе треба да биде влезната базична променлива за друга итерација на симплекс методот да го најде новото оптимално решение. Тогаш θ би било зголемувано се додека друг коефициент не стане негативен, и се така додека θ не се зголеми колку што ни одговара.

θ	Базични променливи	Р-ки	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Десна страна	Оптимално решение
			Коефициентот на:							
	$Z(\theta)$	(0)	1	0	0	0	$\frac{9-7\theta}{6}$	$\frac{3+2\theta}{3}$	$36-2\theta$	$x_4 = 0$ $x_5 = 0$
$0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	$x_3 = 2$
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	$x_2 = 6$
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	$x_1 = 2$
	$Z(\theta)$	(0)	1	0	0	$\frac{-9+7\theta}{2}$	0	$\frac{5-\theta}{2}$	$27+5\theta$	$x_3 = 0$ $x_5 = 0$
$\frac{9}{7} \leq \theta \leq 5$	x_4	(1)	0	0	0	3	1	-1	6	$x_4 = 6$
	x_2	(2)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	$x_2 = 3$
	x_1	(3)	0	1	0	1	0	0	4	$x_1 = 4$
	$Z(\theta)$	(0)	1	0	$-5+\theta$	$3+2\theta$	0	0	$12+8\theta$	$x_2 = 0$ $x_3 = 0$
$\theta \geq 5$	x_4	(1)	0	0	2	0	1	0	12	$x_4 = 12$
	x_5	(2)	0	0	2	-3	0	1	6	$x_5 = 6$
	x_1	(3)	0	1	0	1	0	0	4	$x_1 = 4$

Алгоритам за промена на параметрите Cj

1) Реши ја задачата θ=0 со симплекс методот.
2) Користи ја процедурата за анализа на осетливоста за да ги воведеш $\Delta c_j=\alpha_j\theta$ во промените во (0)
3) Зголемувај го θ се додека една од небазичните променливи има свој коефициент во (0) кој станал негативен (или се додека θ не се зголемил колку што ни одговара)
4) Користи ја оваа променлива како влезна базична променлива за итерација на симплекс методот да најде ново оптимално решение. Оди на чекор 3.

Систематски промени во параметрите b_i

Во случај кога параметрите b_i се менуваат систематски , модификацијата на оригиналниот ЛП проблем е: b_i се заменува со $b_i+\alpha_i\theta$, за i=1,2,….,m , каде α_i се дадени влезни константи . На тој начин обичната ЛП задача:

max $z=\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$,

така што $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \le b_i$, за i=1,2,…m

и $x_j \ge 0$ за j=1,2,..n.

се заменува со:

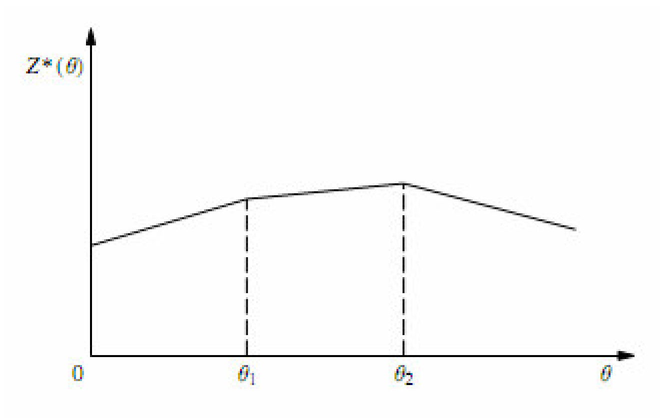
max $z(\theta)=\sum_{j=1}^{n}(c_j\, x_j)$,

така што $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \le b_i+\alpha_i\theta$, за i=1,2,…m

и $x_j \ge 0$ за j=1,2,..n.

Целта е да се идентификува оптималното решение како функција од θ. Со оваа формулација , соодветната вредност на објективната функција $Z^*(\theta)$ секогаш има линеарна и конкавна форма. Множеството од базични променливи во оптималните решенија се менува (како што расне θ) само каде што се менува наклонот на $Z^*(\theta)$.

Сепак, за разлика од претходниот случај вредноста на овие променливи сега се менува како (линеарна) функција од θ меѓу смените на наклнот. Причината за тоа е што зголемувањето на θ ја менува десната страна на почетниот систем од равенки , што пак предизвикува промени во десните страни на крајниот систем од равенки, односно во вредностите на крајното множество од базични променливи.



Вредноста на функцијата на цел за оптималното решение како ф-ја од θ за параметарското линеарно програмирање со ситематски промени во bi параметрите

Овој график отсликува проблем со три множества од базни променливи, кои се оптимални за различни вредности на θ, првото за $0 \le \theta \le \theta_1$, второто за $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, и третото за $\theta \ge \theta_2$.

Во секој од овие интервали на θ , вредноста на $Z^*(\theta)$ се менува во однос на θ и покрај фиксните коефициенти c_j , затоа што x_j вредностите се менуваат.

Следната сумирана процедура за пронаоѓање решение е слична со претходната за c_j параметрите. Тоа е така бидејќи менувањето на вредностите на b_i параметрите е еквивалентно со менување на коефициентите во објективната функција на дуалниот модел. Затоа , процедурата за примарниот проблем е комплементарна со истовремено применување на процедурата за систематски промени на c_j параметрите на дуалниот модел.

Промена во параметрите bi кај задачата Wyndor Glass Co.

За да ја илустрираме оваа процедура на начин кој демонстрира дуална врска во c_j параметрите, ќе го примениме дуалниот проблем на Wyndor Glass Co. проблемот:

Примарна задача

Maximize $Z = 3x_1 + 5x_2$,

со ограничувањата

$$x_1 \le 4$$
$$2x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$

и $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Дуална задача

Minimize $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$,

со ограничувањата

$$y_1 + 3y_3 \ge 3$$
$$2y_2 + 2y_3 \ge 5$$

и $y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$

Матричен облик на примарната задача

Maximize $Z = [3,\ 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

со ограничувањата

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

и $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Матричен облик на дуалната задача

Minimize $W = [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

со ограничувањата

$$[y_1,\ y_2,\ y_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ge [3,\ 5]$$

и $[y_1,\ y_2,\ y_3] \ge [0,\ 0,\ 0].$

max $Z = -4y_1 - 12y_2 - 18y_3$,

така што, $y_1 + 3y_3 \ge 3$

$2y_2 + 2y_3 \ge 5$, и $y_1, y_2, y_3 \ge 0$

Да претпоставиме дека релативните чекори се $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = -1$, за да функционалните ограничувања станат :

$$y_1 + 3y_3 \ge 2\theta \text{ или } -y_1 - 3y_3 \le -3 - 2\theta$$
$$2y_2 + 2y_3 \ge 5 - \theta \text{ или } -2y_2 - 2y_3 \le -5 + \theta$$

На тој начин дуалноста на овој проблем е преставена во табелата:

Итерација	Базични променливи	Р-ки	Коефициентот на:						Десна страна
			Z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
0	Z	(0)	1	4	12	18	0	0	0
	y_4	(1)	0	-1	0	-3	1	0	-3
	y_5	(2)	0	0	-2	-2	0	1	-5
1	Z	(0)	1	4	0	6	0	6	-30
	y_4	(1)	0	-1	0	-3	1	0	-3
	y_2	(2)	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	Z	(0)	1	2	0	0	2	6	-36
	y_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
	y_2	(2)	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Проблемот θ=0 веќе е решен , па започнуваме со финалната симплекс таблица што ни е дадена кај оригиналната Wyndor Glass Co. задача.

Користејќи ја процедурата за анализа на осетливоста , наоѓаме дека записите во десните колони од табелата се менуваат до вредностите:

$$Z^* = y^*\bar{b} = [2,6]\begin{bmatrix}-3-2\theta\\-5+\theta\end{bmatrix} = -36+2\theta,$$

$$b^* = S^*\bar{b} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3-2\theta\\-5+\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\frac{2\theta}{3}\\ \frac{3}{2}-\frac{7\theta}{6}\end{bmatrix}$$

Затоа двете базични променливи во оваа табела $y_3 = \frac{3+2\theta}{3}$ и $y_2 = \frac{9-7\theta}{6}$ остануваат ненегативни за $0 \le \theta \le \frac{9}{7}$. Зголемувајќи го θ повеќе од $\theta = -\frac{9}{7}$ бара да y_2 го направиме излезна базична променлива за друга итерација на дуалниот симплекс метод , и се така како што е сумирано во следната табела:

θ	Базични променливи	Р-ки	Коефициентот на:						Десна страна	Оптимално решение
			Z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
$0 \le \theta \le \frac{9}{7}$	$Z(\theta)$	(0)	1	2	0	0	2	6	$-36+2\theta$	$y_1 = y_4 = y_5 = 0$
	y_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{3+2\theta}{3}$	$y_3 = \frac{3+2\theta}{3}$
	y_2	(2)	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9-7\theta}{6}$	$y_2 = \frac{9-7\theta}{6}$
$\frac{9}{7} \le \theta \le 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	6	0	4	3	$-27-5\theta$	$y_2 = y_4 = y_5 = 0$
	y_3	(1)	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5-\theta}{2}$	$y_3 = \frac{5-\theta}{2}$
	y_1	(2)	0	1	-3	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{-9+7\theta}{2}$	$y_1 = \frac{-9+7\theta}{2}$
$\theta \ge 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	12	6	4	0	$-12-8\theta$	$y_2 = y_3 = y_4 = 0$
	y_5	(1)	0	0	-2	-2	0	1	$-5+\theta$	$y_5 = -5+\theta$
	y_1	(2)	0	1	0	3	-1	0	$3+2\theta$	$y_1 = 3+2\theta$

Алгоритам за промена на параметрите b_i

1. Реши ја задачата со θ=0 со симплекс методот
2. Користи ја процедурата за анализа на осетливоста за да ја воведеш разликата $\Delta b_i = \alpha_i \theta$ во десната колона.
3. Зголемувај го θ сѐ додека вредноста на една од базичните променливи во десната колона, не стане негативна (или додека θ не се зголеми колку што ни е потребно)
4. Користи ја оваа променлива како излезна базична променлива за итерација на дуалниот симплекс метод, за да најдеме ново оптимално решение. Оди на чекор 3.

Користена литература:

- F. S. Hillier, G. J. Lieberman, Introduction to operations research, The McGraw-Hill Companies (2001)
- Adamu Wakili , Advancement in Scientific and Engineering Research , Vol. 1(1), pp. 17-21, August 2013
- A. Holder, Parametric Linear Programming, March 3, 2010
- http://en.wikipedia.org/wiki/Sensitivity_analysis