4.4 Симплекс метод

Симплекс методот генерира низа од точки x^k така да сите од нив се базни допустливи решенија на системот од ограничувачи равенства за ЛП-задачата дадена во стандарден облик. Најнапред даваме неколку тврдења на кои се базира симплекс методот.

Да ја разгледаме задачата на линеарно програмирање дадена во стандарден облик, односно

$$\begin{aligned} \min z &= \langle c, x \rangle \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

каде $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A е $m \times n$ матрица. Без губење на општоста, може да претпоставиме дека рангот на матрицата A е еднаков на m (тогаш $m \leq n$). Тогаш, со елементарни трансформации можеме системот

$$Ax = b \tag{4.11}$$

да го доведеме до следниот еквивалентен облик

$$A'x = b' \tag{4.12}$$

каде матрицата A' од ред $m \times n$ е таква да $A' = [E\ A'']$, при што E е единична матрица од ред m, A'' е матрица од ред $m \times (n-m)$, и $b' \in \mathbb{R}^m$. Ако од последниот облик (4.12) ги изразиме првите m компоненти на векторот x, односно

$$x_j = b'_j - \sum_{k=m+1}^{n} a'_{jk} x_k,\ j = 1, 2, ..., m,$$

и ги замениме во функцијата на целта, ќе добиеме

$$z = \langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{m} c_j (b'_j - \sum_{k=m+1}^{n} a'_{jk} x_k) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j = z'_0 + \langle c', x \rangle,$$

каде $z'_0 = \sum_{j=1}^{m} c_j b'_j$ и $c' = (0, ..., 0, c'_{m+1}, ..., c'_n)^T$, $c'_j = c_j - \sum_{k=1}^{m} c_k a'_{kj}$, $j = m+1, ..., n$. На овој начин добиваме еквивалентна задача на задачата (4.10), а тоа е задачата

$$\begin{aligned} \min z &= z'_0 + \langle c', x \rangle \\ A'x &= b' \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

каде обликот на A' и c' е даден погоре, односно првите m колони на матрицата A' се такви да колоната A'_j има 1-ца на j-тото место и останатите се нули, $j = 1, ..., m$, додека кај векторот c' првите m компоненти се нули.

Забелешка 4.6. Бидејќи првите m колони на матрицата A' од системот (4.12) се линеарно независни, односно множеството од базни индекси е $\mathcal{B} = \{1, 2, ..., m\}$, па според Дефиниција 4.2 значи дека за базното решение $\overline{x}$ на овој систем важи $\overline{x}_j = 0$, $j = m+1, ..., n$, и откако овие вредности ќе се заменат во системот (4.12) се добива дека останатите компоненти на базното решение се $\overline{x}_j = b'_j$, $j = 1, ..., m$.

Теорема 4.8. *Нека во задачата (4.13) имаме дека $b' \geq 0$ и $c' \geq 0$. Тогаш, базното решение кое одговара на множеството од базни индекси $\mathcal{B} = \{1, 2, ..., m\}$ е оптимално решение на задачата (4.10).*

Доказ. ПОКАЖАНО НА ЧАС (и во Vujčić, Ašić, Miličić, Теорема 4.1.2) ∎

Теорема 4.9. *Нека во задачата (4.13) имаме дека $b' \geq 0$ и нека за некој $k \in \{m+1, ..., n\}$ важи $c'_k < 0$ и $a'_{ik} \leq 0$, $i = 1, 2, ..., m$. Тогаш, функцијата на целта на задачата (4.10) е неограничена од долу на нејзината допустлива област.*

Доказ. ПОКАЖАНО НА ЧАС (и во Vujčić, Ašić, Miličić, Теорема 4.1.3) ∎

Теорема 4.10. *Нека во задачата (4.13) имаме дека $b' \geq 0$ и нека за некој $k \in \{m+1, ..., n\}$ и $s \in \{1, ..., m\}$ важи $c'_k < 0$ и $a'_{sk} > 0$. Тогаш, постои базно допустливо решение $\tilde{x}$ на задачата (4.10) така да $\langle c, \tilde{x} \rangle \leq \langle c, \overline{x} \rangle$ каде $\overline{x}$ е базно решение на задачата (4.13) кое одговара на множеството од базни индекси $\mathcal{B} = \{1, 2, ..., m\}$.*

Доказ. ПОКАЖАНО НА ЧАС (и во Vujčić, Ašić, Miličić, Теорема 4.1.4) ∎

Да ја разгледаме задачата на линеарно програмирање дадена во обликот

$$\begin{aligned} \min z = z_0 + \langle c, x \rangle \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

каде $z_0 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A е $m \times n$ матрица со ранг еднаков на m. На секоја задача од обликот (4.14) и се придружува ЛП-таблица дадена со:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \cdots & c_n & -z_0 \end{array} \tag{4.15}$$

Дефиниција 4.3. Ако во задачата (4.14) матрицата A има точно m базни колони A_j, $j \in \mathcal{B}$ кои се единичните вектори во $\mathbb{R}^m$, при тоа соодветните компоненти на векторот c се нули т.е. $c_j = 0$, $j \in \mathcal{B}$, и $b \geq 0$, тогаш ЛП-таблицата која одговара на оваа задача се нарекува *симплекс таблица*, а задачата е дадена во *канонски облик*.
Така на пример, ако во задачата (4.13) имаме да $b \geq 0$, тогаш таа е дадена во канонски облик.

Забелешка 4.7. Базното решение $\overline{x}$, каде $\overline{x}_j = b_j$, $j \in \mathcal{B}$ и $\overline{x}_j = 0$, $j \notin \mathcal{B}$, за задача дадена во канонски облик е и нејзино базно допустливо решение, затоа што $b \geq 0$.

Дефиниција 4.4. За *елементарна трансформација* на ЛП-таблица се смета некоја од следните трансформации:

1) множење на било која основна редица ($1 \leq i \leq m$) со број α различен од нула, ознака $H_i(\alpha)$,

2) додавање на i-тата редица ($1 \leq i \leq m+1$) j-тата основна редица ($1 \leq j \leq m$) помножена со некој број α, при тоа $i \neq j$, ознака $H_{ij}(\alpha)$.

Забелешка 4.8. Задачите кои одговараат на еквивалентни ЛП-таблици, односно кога едната ЛП-таблица е добиена од другата со помош на еквивалентни трансформации на ЛП-таблици, се еквивалентни т.е. имаат еднакви допустливи области и еднакво дефинирани функции на цел на допустливите области.
Имено, ако при елементарната трансформација не се менува функцијата на целта, тогаш од елементарни трансформации во линеарна алгебра, јасно е дека новодобиената задача е еквивалентна на дадената. Нека е извршена елементарната трансформација $H_{m+1,i}(\alpha)$, за некој $i \in \{1, ..., m\}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогаш, системот равенки останува непроменет, а функцијата на целта од

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z_0$$

по трансформацијата е сменета во

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + \alpha a_{ij}) x_j + (z_0 - \alpha b_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z_0 + \alpha \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \Big).$$

Бидејќи, за секој $x \in X$ важи $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, имаме дека вредноста на функцијата на целта останува непроменета на X.

Симплекс алгоритамот се применува на задачи во канонски облик, односно задачи кај кои соодветната ЛП-таблица е симплекс таблица.

АЛГОРИТАМ 4.1 (Симплекс метод).

Чекор 0. Доведи ја дадена ЛП-задача (4.14) во канонски облик. Земи го за почетно приближување x^0 нејзиното базно допустливо решение. Стави $k = 0$.

Чекор 1. Ако $c \geq 0$, тогаш оди на Чекор 6.

Чекор 2. Ако постои $c_j < 0$ за кој $a_{ij} \leq 0$, тогаш оди на Чекор 7.

Чекор 3. Најди $r \in \{1, ..., n\}$ и $s \in \{1, ..., m\}$ за кои $c_r < 0$ и

$$\frac{b_s}{a_{sr}} = \min\{\frac{b_i}{a_{ir}} \mid a_{ir} > 0\}.$$

Чекор 4. Со помош на елементарни трансформации на ЛП-таблица направи ја r-тата колона единична со 1-ца на s-тото место т.е. $a_{sr} = 1$, $a_{ir} = 0$, $i \neq s$ и $c_r = 0$.

Чекор 5. Земи го за следно приближување x^{k+1} базното допустливо решение кое одговара на новодобиената симплекс таблица. Стави $k = k + 1$ и оди на Чекор 1.

Чекор 6. За оптимално решение на дадената задача земи го приближувањето x^k, а за оптимална вредност на функцијата на целта земи ја вредноста z_0. СТОП.

Чекор 7. Функцијата на целта е неограничена од долу на множеството допустливи точки. СТОП.

Теорема 4.11. *Алгоритамот на симплекс методот Алгоритам 4.1 е добро дефиниран.*

Доказ. Треба да покажеме дека секој од чекорите може да се изврши точно. (ПОКАЖАНО НА ЧАС) ∎

Теорема 4.12. *Нека задачата (4.14) е недегенерирана ЛП-задача. Тогаш, агоритамот на симплекс методот генерира конечна низа од точки $\{x^k\}$.*

Доказ. Од претпоставката за недегенерираност и Теорема 4.10 имаме дека $z(x_{k+1}) < z(x^k)$. Бидејќи секоја итерација x^k е базно допустливо решение (Чекор 5 од Алгоритам 4.1) и од Теорема 4.6 имаме дека секое базно допустливо решение x^k е екстремна точка. Од конечноста на множеството од екстремни точки (има најмногу $\binom{n}{m}$ екстремни точки) и строгата монотоност на низата $\{z(x^k)\}$, имаме дека низта $\{x^k\}$ генерирана со Алгоритам 4.1 е конечна. ∎

Забелешка 4.9. Ако се отстрани претпоставката за недегенерираност на ЛП-задачата (4.14) во Теорема 4.12, не мора низата $\{x^k\}$ да е конечна (Beale, 1955). На пример, Алгоритмот 4.1 применет на задачата

$$\begin{aligned} \min \{-\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4\} & \\ \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \leq 0 & \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \leq 0 & \\ x_3 \leq 1 & \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{aligned}$$

генерира бесконечна низа од приближувања $\{x^k\}$.

Пример 4.3. Да ја решиме задачата (4.6) од Пример 4.2 со симплекс методот. Во Пример 4.2 веќе ја претворивме дадената задача во стандарден облик (4.7). Ја формираме ЛП-таблицата која одговара на овој стандарден облик

$$\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Следен чекор е да со елементарни трансформации оваа ЛП-таблица да ја доведеме до симплекс таблица (матрицата A на системот ограничувања да има точно три базни колони, соодветните компоненти на векторот c да се нули и $b \geq 0$). Во последната ЛП-таблица шестата и седмата колона се базни со нули на соодветните места во векторот c и задоволен е условот $b \geq 0$. Согледуваме дека веќе исполнетиот услов $b \geq 0$ не би го нарушиле доколку ја направиме првата колона базна со 1-ца во третата редица. Затоа, ги применуваме елементарните трансформации $H_{13}(-1)$, $H_{23}(-1)$ и $H_{43}(-3)$.

$$\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}$$

Последната ЛП-таблица е симплекс таблица. Базното допудтливо решение кое одговара на оваа таблица, го земаме за почетна итерација на симплекс методот, тоа е точката $x_0 = (2,0,0,0,0,8,3,0)$ најдено според Забелешка 4.7.

Сега, бараме негативна компонента од векторот c. Имаме $c_2 = -1 < 0$, според Чекор 3 од симплекс алгоритмот $r = 2$ додека s е онаа вредност на i за која количникот b_i/a_{i2}, $a_{i2} > 0$ е минимален. Бидејќи $\min\{\frac{2}{1}, \frac{3}{1}\} = \frac{2}{1} = \frac{a_{32}}{b_3}$, заклучуваме дека $s = 3$, што значи дека со следните елементарни трансформации треба да ја направиме втората ($r = 2$) колона базна со 1-ца во треата ($s = 3$) редица. Ги применуваме трансформаццииите $H_{23}(-1)$ и $H_{43}(1)$.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 8 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\
\hline
1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4
\end{array}$$

Базното допустливо решение кое одговара на последната симплекс таблица го земаме за следна итерација, тоа е точката $x_1 = (0,2,0,0,0,8,1,0)$.

Во последната симплекс таблица се уште има компоненти на векторот c кои се негативни, затоа повторни го извршуваме Чекор 3 од симплекс алгоритмот. Од $c_3 = -1 < 0$ имаме дека $r = 3$, додека единствен кандидат за s е $s = 1$ (само $a_{13} > 0$ од сите елементи од третата колона на матрицата A). Значи, ја правиме третата колона базна со 1-ца во првата редица, па ги применуваме трансформациите $H_{21}(1)$ и $H_{41}(1)$.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 8 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4
\end{array}$$

За следна итерација го земаме базното допустливо решение $x_2 = (0,2,8,0,0,0,9,0)$ кое одговара на последната симплекс таблица.

Бидејќи $c_4 = -1 < 0$ заклучуваме дека $r = 4$, додека единствен кандидат за s е $s = 2$. Значи, ја правиме базна четвртата колона со 1-ца во втората редица. Ги применуваме трансформациите $H_{32}(1)$ и $H_{42}(1)$.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 8 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 11 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 13
\end{array}$$

Па, следна итерација е $x_3 = (0,11,8,9,0,0,0,0)$. Бидејќи последната симплекс таблица е со својство да $c \geq 0$ заклучуваме дека базното допустливо решение кое одговара на оваа симплекс таблица е оптималнито решение за задачата (4.7) т.е. $x^* = x_3 = (0, 11, 8, 9, 0, 0, 0, 0)$ со оптимална вредност на функцијата на целта -13. Со оглед на направените смени на променливи $x_1 \leftrightarrow x_1 - x_4$ и $x_3 \leftrightarrow x_3 - x_5$ во Пример 4.2 при претварањето во стандарден облик, заклучуваме дека оптимално решение на задачата (4.6) е $x^* = (-9, 11, 8)$ со иста оптимална вредност на функцијата на целта -13.

4.5 Двофазен симплекс метод

Да ја разгледаме задачата на линеарно програмирање дадена во обликот

$$\begin{aligned} \min z &= z_0 + \langle c, x \rangle \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

каде $z_0 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A е $m \times n$ матрица со ранг еднаков на m и при тоа важи $b \geq 0$ (доколку условот $b \geq 0$ не е исполнет, т.е. постои $b_i < 0$ за некој $i \in \{1, ..., m\}$, тогаш ја множиме i-тата равенка од системот $Ax = b$ со -1).

Ако задачата (4.16) е во канонски облик, тогаш на неа го применуваме симплекс методот. Ако таа не е во канонски облик, ја формираме нејзината *помошна зададача* на линеарно програмирање со воведување на *вештачки променливи* $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$, односно

$$\begin{aligned} \min w &= \langle d, x \rangle \\ [A\ E]x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

каде $d \in \mathbb{R}^{n+m}$, $d_j = 0$, $j = 1, ..., n$ и $d_j = 1$, $j = n+1, ..., n+m$ (што значи дека $w = \langle d, x \rangle = x_{n+1} + ... + x_{n+m}$), и E е единичната матрица од ред m. Соодветната ЛП-таблица за помошната задача (4.17) е

$$\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & & 1 & 0 \end{array} \tag{4.18}$$

Лесно се воочува дека доколку секоја основна редица ($1 \leq i \leq m$) од ЛП-таблицата (4.18) ја помножиме со -1 и ја додадеме на последната $(m+1)$-ва редица, односно ги примениме елементарните трансформации $H_{m+1,i}(-1)$, $i = 1, ..., m$, ќе добиеме симплекс таблица. Тогаш, задачата која одговара на оваа симплекс таблица е во канонски облик, односно помошната задача (4.17) запишана во еквивалентен канонски облик е

$$\begin{aligned} \min w &= w_0 + \langle h, x\rangle \\ [A\ E]x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

каде $w_0 = \sum_{i=1}^m b_i$, $h_j = -\sum_{i=1}^m a_{ij}$, $j = 1, ..., n$ и $h_j = 0$, $j = n+1, ..., n+m$. Сега, на задачата (4.19) може да се примени симплекс методот.

Двофазниот симплекс алгоритам се применува на задачи кои не се во канонски облик, односно задачи кај кои соодветната ЛП-таблица не е симплекс таблица. При тоа, во првата фаза, се формира помошна ЛП-задача која лесно се доведува до канонски облик и на неа се применува симплекс методот. А, во втората фаза, се елиминираат сите вештачки променливи и повторни се применува симплекс методот.

АЛГОРИТАМ 4.2 (Двофазен симплекс метод).

I фаза.

Чекор I.0. За задачата (4.16) која не е во канонски облик, образувај ја помошната задача (4.17) и доведи ја до канонски облик (4.19).

Чекор I.1. Најди ја оптималната вредност w^* на задачата (4.19) со помош на симплекс метод.

Чекор I.1.1. Ако $w^* \neq 0$, тогаш допустливата област на задачата (4.16) е празно множество. СТОП.

Чекор I.1.2. Ако $w^* = 0$, тогаш премини на II фаза.

II фаза.

Чекор II.0. Од последната симплекс таблица добиена при решавање на задачата (4.19) во I фаза, Чекор I.1, отстрани ги сите колони кои одговараат на вештачките променливи ($n+1 \leq j \leq n+m$) и не се единични (со тоа се отстрануваат и самите вештачки променливи), додека последната $(m+1)$-ва редица замени ја со редицата

$$c_1\ c_2\ \cdots\ c_n\ 0\ \cdots\ 0\ -z_0$$

која има $(n+k+1)$ елементи, каде k е бројот на преостанати вештачки променливи.

Чекор II.1. Со користење на елементарни трансформации на ЛП-таблица последната ЛП-таблица се доведува до симплекс таблица, така да сите елементи од последната $(m+1)$-ва редица кои одговараат на единични колони на матрицата A се доведуваат до нула.

Чекор II.2. Ако во последно добиената симплекс таблица нема колони кои одговаррат на вештачките променливи, оди на Чекор II.4.

Чекор II.3. Нека во последно добиената симплекс таблица останата е колоната која одговара на вештачката променлива x_t. Нека таа колона има единица во s-тата редица, и останатите елементи и се нули.

Чекор II.3.1. Ако сите преостанати елементи во s-тата редица се нули, тогаш отстрани ги s-тата редица и колоната која одговара на вештачката променлива x_t. Оди на Чекор II.2.

Чекор II.3.2. Нека меѓу преостнатите елементи од s-тата редица во r-тата колона има елемент различен од нула. Со помош на елементарни трансформации на ЛП-таблица направи ја r-тата колона единична со единица во s-тата редица и отстрани ја колоната која одговара на вештачката променлива x_t. Оди на Чекор II.2.

Чекор II.4. На добиената симплекс таблица примени го симплекс методот. Ако се добие решение, тогаш добиеното решение земи го за оптимално решение на задачата (4.16).

Теорема 4.13. *Алгоритамот на двофазниот симплекс метод Алгоритам 4.2 е добро дефиниран.*

Доказ. Треба да покажеме дека секој од чекорите може да се изврши точно. (ПОКАЖАНО НА ЧАС) ■

4.6 Дуален симплекс метод

Дуалниот симплекс метод генерира низа од точки x^k кои се базни решенија и ги задоволуваат условите за оптималност, освен можеби условот за ненегативност на компонентите.

Да ја разгледаме задачата на линеарно програмирање дадена во обликот

$$\begin{aligned} \min z &= z_0 + \langle c, x \rangle \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

каде $z_0 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A е $m \times n$ матрица со ранг еднаков на m, на која и одговара ЛП-таблицата

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \cdots & c_n & -z_0 \end{array} \tag{4.21}$$

Дефиниција 4.5. Ако во задачата (4.20) матрицата A има точно m базни колони A_j, $j \in \mathcal{B}$ кои се единичните вектори во $\mathbb{R}^m$, при тоа соодветните компоненти на векторот c се нули т.е. $c_j = 0$, $j \in \mathcal{B}$, и $c \geq 0$, тогаш ЛП-таблицата која одговара на оваа задача се нарекува *дуална симплекс таблица.*

Забелешка 4.10. Ако и $b \geq 0$, тогаш дуалната симплекс таблица е и симплекс танлица, па според алгоритмот на симплекс методот Алгоритам 4.1, базното допустливо решение кое и одговара е и оптимално решение за дадената задача.

Дуалниот симплекс алгоритам се применува на задачи кај кои соодветната ЛП-таблица е дуална симплекс таблица.

АЛГОРИТАМ 4.3 (Дуален симплекс метод).

Чекор 0. Трансформирај ја ЛП-таблицата на дадената ЛП-задача (4.20) во дуална симплекс таблица. Земи го за почетно приближување x^0 нејзиното базно решение. Стави $k = 0$.

Чекор 1. Ако $b \geq 0$, тогаш оди на Чекор 6.

Чекор 2. Ако постои $b_i < 0$ за кој $a_{ij} \geq 0$, тогаш оди на Чекор 7.

Чекор 3. Најди $s \in \{1, ..., m\}$ и $r \in \{1, ..., n\}$ за кои $b_s < 0$ и

$$\frac{c_r}{a_{sr}} = \max\{\frac{c_j}{a_{sj}} \mid a_{sj} < 0\}.$$

Чекор 4. Со помош на елементарни трансформации на ЛП-таблица направи ја r-тата колона единична со 1-ца на s-тото место т.е. $a_{sr} = 1$, $a_{ir} = 0$, $i \neq s$ и $c_r = 0$.

Чекор 5. Земи го за следно приближување x^{k+1} базното решение кое одговара на новодобиената дуална симплекс таблица. Стави $k = k + 1$ и оди на Чекор 1.

Чекор 6. За оптимално решение на дадената задача земи го приближувањето x^k, а за оптимална вредност на функцијата на целта земи ја вредноста z_0. СТОП.

Чекор 7. Допустливата област на дадената задача е празно множество. СТОП.

Теорема 4.14. *Алгоритамот на дуалниот симплекс метод Алгоритам 4.3 е добро дефиниран.*

Доказ. Треба да покажеме дека секој од чекорите може да се изврши точно. (ПОКАЖАНО НА ЧАС) ∎

Забелешка 4.11. Разликата меѓу симплекс методот и дуалниот симплекс метод е во тоа што симплекс методот постојано генерира базни допустливи решенија, додека дуалниот симплекс метод генерира базни решенија од кои последното е базно допустливо ресение (во случај на конечна низа $\{x^k\}$).