4

Линеарно програмирање

4.1 Задача на линеарно програмирање

Општ облик на задача на линеарно програмирање

$$\begin{aligned} \min\ & \langle c, x \rangle \\ & A_L x \leq b_L \\ & A_R x \geq b_R \\ & A_E x = b_E \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

каде $c \in \mathbb{R}^n$, $b_L \in \mathbb{R}^m$, $b_R \in \mathbb{R}^k$, $b_E \in \mathbb{R}^p$, A_L е $m \times n$ матрица, A_R е $k \times n$ матрица, A_E е $p \times n$ матрица.

Доколку во дадената задача на линеарно програмирање не е поставен условот за ненегативност по сите променливи (условот $x \geq 0$) се применува следната постапка. Ако за променливата x_j не е поставен условот $x_j \geq 0$, тогаш во функцијата на целта и во секое од ограничувањата таа се заменува со $x_j - x_j'$, при што x_j' е нова променлива и при тоа $x_j \geq 0$ и $x_j' \geq 0$. На тој начин ако дадената задача има услови за ненегативност на само r променливи, за остабатите $n - r$ променливи се применува горната постапка и така се добива еквивалентна задача со $n + (n - r) = 2n - r$ променливи каде условот за ненегативност сега е поставен на секоја од променливите.

Симетричен облик на задача на линеарно програмирање

$$\begin{aligned} \min\ & \langle c, x \rangle \\ & A_R' x \geq b_R' \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Стандарден облик на задача на линеарно програмирање

$$\begin{aligned} \min\ & \langle c, x\rangle \\ & A''_E x = b''_E \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

(претварање од општ облик во симетричен облик, и од општ облик во стандарден облик - во општ случај) - ПОКАЖАНО НА ЧАС

Пример 4.1. Следната задача на линеарно програмирање ќе ја претвориме во симетричен облик.

$$\begin{aligned} \max\ & \{2x_1 - x_2\} \\ & x_1 - x_2 \geq 6 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 = 5 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Најнапред треба да направиме премин во задача на минимизација според $\max f(x) = -\min(-f(x))$.

$$\begin{aligned} -\min\ & \{-2x_1 + x_2\} \\ & x_1 - x_2 \geq 6 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 = 5 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Треба да се обезеди ненегативност на сите променливи. Во дадената задача има услов за ненегативност само за променливата x_1. За да обезбедиме ненегативност и на x_2 ја правиме следната смена со воведување на нова променлива x_3. Секаде и во ограничувањата и во функцијата на цел x_2 го заменуваме со $x_2 - x_3$ при што додаваме и услови за ненегативност на x_2 и x_3.

$$\begin{aligned} -\min\ & \{-2x_1 + x_2 - x_3\} \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

И на крај треба сите ограничувања да ги запишеме со знакот за десно неравенство како што е првото ограничување, тоа се второто и третото ограничување. Второто ограничување го множиме со -1, додека од третото ограничувацко равенство добиваме две неравенства со спротивни знаци од кои неравенството со лев знак за неравенство го множиме исто така со -1.

$$
\begin{aligned}
&-\min\{-2x_1 + x_2 - x_3\}\\
&\quad x_1 - x_2 + x_3 \geq 6\\
&\quad -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \geq -10\\
&\quad x_1 + x_2 - x_3 \geq 5\\
&\quad -x_1 - x_2 + x_3 \geq -5\\
&\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Пример 4.2. Да ја претвориме следната задача на линеарно програмирање во стандарден облик.

$$
\begin{aligned}
&\min\{3x_1 + 2x_2 - x_3\}\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 10\\
&\quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5\\
&\quad x_1 + x_2 \geq 2\\
&\quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Оваа задача е веќе задача на минимизација. Условот за ненегативнист на сите променливи ќе го постигнеме со смените $x_1 \leftrightarrow x_1 - x_4$ и $x_3 \leftrightarrow x_3 - x_5$ при што додаваме и услови за ненегативност на x_1, x_3, x_4 и x_5.

$$
\begin{aligned}
&\min\{3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5\}\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \leq 10\\
&\quad x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \leq 5\\
&\quad x_1 + x_2 - x_4 \geq 2\\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

И на крај треба првите три ограничувачки неравенства да ги претвориме во равенста на тој начин што во секое неравенство додаваме израмнувачки ненегативни променливи.

$$
\begin{aligned}
&\min\{3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5\}\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 10\\
&\quad x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_7 = 5\\
&\quad x_1 + x_2 - x_4 - x_8 = 2\\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

4.2 Услови за оптималност и дуалност

Нека е дадена задачата на линерано програмирање во симетричен облик

$$(\Pi) \qquad \begin{aligned} \min\ & \langle c, x\rangle \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

и нека нејзината допустива област ја означиме со $X = \{x|Ax \geq b,\ x \geq 0\}$. Преку теоријата на дуалност кај нелинеарното програмирање се покажува дека дуална задача на дадената задача (П) е задачата

$$(Д) \qquad \begin{aligned} \min\ & \langle b, y\rangle \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

чија допустлива област ќе ја означуме со $Y = \{y|A^T y \leq c,\ y \geq 0\}$. Се покажува и дека дуална задача на задачата (Д) е задачата (П). - ПОКАЖАНО НА ЧАС

Лема 4.1. *Нека се дадени парот дуални ЛП-задачи (П) и (Д). Тогаш, за секој $x \in X$ и $y \in Y$, важи $\langle c, x\rangle \geq \langle b, y\rangle$.*

Доказ. ПОКАЖАНО НА ЧАС ∎

Теорема 4.1 (Теорема за дуалност во линеарно програмирање).

(i) Ако една од задачите (П) и (Д) има решение со конечна оптимална вредност на функцијата на целта, тогаш има и другата, и вредностите на функциите на целта им се еднакви.

(ii) Ако една од задачите (П) и (Д) има допустливи точки и неограничена функција на цел, тогаш другата задача нема допустливи точки.

(iii) Ако и двете задачи (П) и (Д) имаат допустливи точки, тогаш имаат и оптимални решенија со еднакви вредности на функциите на целта.

Доказ. ПОКАЖАНО НА ЧАС ∎

Теорема 4.2 (Принцип на ослабена комплементарност). *Нека се дадени парот дуални ЛП-задачи (П) и (Д) и нека $x^* \in X$ и $y^* \in Y$. Тогаш, x^* и y^* се оптимални решенија на (П) и (Д) соодветно ако и само ако*

$$\langle x^*, c - (y^*)^T A\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle y^*, Ax^* - b\rangle = 0.$$

Доказ. ПОКАЖАНО НА ЧАС ■

Забелешка 4.1. Ако допустливата област на (П) е $X = \emptyset$, тогаш по дефиниција се зема $+\infty$ за оптимална вредност на функцијата на целта на (П). Ако пак допустливата област на (Д) е $Y = \emptyset$, тогаш по дефиниција се зема $-\infty$ за оптимална вредност на функцијата на целта на (Д). Па, **прекин во дуалноста** (нееднакви вредности на функциите на целта) кај парот дуални ЛП-задачи (П) и (Д) настанува само кога $X = \emptyset$ и $Y = \emptyset$.

Забелешка 4.2. Од досегашното излагање може да се заклучи дека примарната задача (П) е дуална на дуалната задача (Д). Тоа значи дека кај линеарното програмирање станува збор за пар заемно дуални задачи.

Според обликот на допустливата област, од интерес се паровите заемно дуални задачи прикажани со Табела 4.1.

	примарна задача	дуална задача
1	$\min\{\langle c,x\rangle \mid Ax \geq b\}$	$\max\{\langle b,y\rangle \mid A^T y = c,\ y \geq 0\}$
2	$\min\{\langle c,x\rangle \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\}$	$\max\{\langle b,y\rangle \mid A^T y \leq c,\ y \geq 0\}$
3	$\min\{\langle c,x\rangle \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$	$\max\{\langle b,y\rangle \mid A^T y \leq c\}$
4	$\min\{\langle c,x\rangle \mid Ax = b\}$	$\max\{\langle b,y\rangle \mid A^T y = c\}$

Табела 4.1: Парови заемно дуални ЛП задачи

4.3 Екстремни точки, базни решенија и оптималност

Дефиниција 4.1. Нека $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Точката $x \in S$ е *екстремна точка* на S ако не може да се претстави како конвексна комбинација од две различни точки од S т.е. не постојат точки $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$ и скалар $\lambda \in (0,1)$ така да $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

Дефиниција 4.1а. Нека $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Точката $x \in S$ е *екстремна точка* на S ако не постојат точки $x', x'' \in S$, $x' \neq x''$ така да $x = (x' + x'')/2$.

Забелешка 4.3. Дефинициите 4.1 и 4.1а се еквивалентни.... (да се докаже)

Да ја разгледаме задачата на линеарно програмирање дадена во стандарден облик, односно

$$\begin{aligned} \min\ & \langle c,x\rangle \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

каде $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A е $m \times n$ матрица. Без губење на општоста, може да претпоставиме дека рангот на матрицата A е еднаков на m, од каде следи дека $m \leq n$. Ако ги означиме со A_j, $j = 1, ..., n$ колоните на матрицата A, тогаш допустливата област за задачата (4.8) може да се запише како

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b,\ x \geq 0\}.$$

Теорема 4.3. *Точката $\overline{x} \in X$ е екстремна точка на допустливата област X од задсачата (4.8) ако и само ако колоните на матрицата A кои одговаррат на ненултите компоненти на $\overline{x}$ се линеарно независни.*

Доказ. (доказот го има кај Vujčić, Ašić, Miličić, Теорема 3.3.1) ■

Теорема 4.4. *Ако допустливата област X од задачата (4.8) е непразна, тогаш X има екстремна точка.*

Доказ. (доказот го има кај Vujčić, Ašić, Miličić, Теорема 3.3.2) ■

Теорема 4.5. *Ако задачата (4.8) има оптимално решение, тогаш има и оптимално решение кое е екстремна точка на допустливата област X.*

Доказ. (доказот го има кај Vujčić, Ašić, Miličić, Последица на стр.61) ■

Забелешка 4.4. Од Теорема 4.3 следи дека допустливата област има најмногу $\binom{n}{m}$ екстремни точки. Од Теорема 4.5 следи дека барем една од нив е оптимална за задачата (4.8), под претпоставка дека задачата има решение. Па може да заклучиме дека, ако една ЛП-задача има решение, тогаш таа може да се реши во конечен број на чекори.

Да го разгледаме сега системот линеарни равенки

$$Ax = b \tag{4.9}$$

каде $b \in \mathbb{R}^m$, A е $m \times n$ матрица. Нека рангот на матрицата A е еднаков на m (тогаш $m \leq n$). Исто како претходно ги означуваме со A_j, $j = 1, ..., n$ колоните на матрицата A, па системот (4.9) може да се запише како

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b.$$

Дефиниција 4.2. Нека $\mathcal{B} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ е множество од точно m индекси, такво да колоните A_j, $j \in \mathcal{B}$ се линеарно независни. Нека $x \in \mathbb{R}^n$ е решение на системот (4.9).

(i) Ако $x_j = 0$, $j \notin \mathcal{B}$, тогаш x се нарекува *базно решение.*

(ii) Ако x е базно решение и $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$, тогаш x се нарекува *базно допустливо решение.*

(iii) Ако x е базно допустливо решение за кое важи $x_j > 0$, $j \in \mathcal{B}$, тогаш x се нарекува *недегенерирано базно допустливо решение.* Задачата на линеарно програмирање (4.8) се нарекува *неденерирана* ако сите базни допустливи решенија на системот (4.9) се недегенерирани.

Теорема 4.6. *Секое базно допустливо решение на системот (4.9) е екстремна точка на допустливата област X за задачата (4.8). Важи и обратното тврдење.*

Доказ. Нека $\overline{x}$ е базно допустливо решение на системот (4.9) кое одговара на множеството базни индекси $\mathcal{B} = \{j_1, j_2, ..., j_m\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. Тоа значи дека колоните A_j, $j \in \mathcal{B}$ се линеарно независни, и $\overline{x}_j \geq 0$, за $j \in \mathcal{B}$, и $\overline{x}_j = 0$, за $j \notin \mathcal{B}$, од каде следи дека $\overline{x} \in X$. Бидејќи колоните на матрицата A кои одговараат на ненултите комоненти на $\overline{x}$ се линеарно независни, од Теорема 4.3 следи дека $\overline{x} \in X$ е екстремна точка на допустливата област X.

Обратно, нека $\overline{x} \in X$ е екстремна точка на допустливата област X. Нека $\mathcal{B} = \{j_1, j_2, ..., j_p\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ е множеството од индекси на ненултите компоненти на $\overline{x}$ т.е. $\overline{x}_j > 0$, за $j \in \mathcal{B}$, и $\overline{x}_j = 0$, за $j \notin \mathcal{B}$. Тогаш, од Теорема 4.3 заклучуваме дека соодветните колони на матрицата A, колоните A_j, $j \in \mathcal{B}$ се линеарно независни и $p \leq m$. Ако $p = m$ доказот е завршен, односно заклучуваме дека $\overline{x}$ е базно допустливо решение со ненегативни компоненти кои одговараат на множеството $\mathcal{B}$ од точно m индекси, и останатите нули. Нека $p < m$, бидејќи рангот на A е еднаков на m избираме уште $m - p$ колони од останатите колони A_j, $j \notin \mathcal{B}$ за да конструираме множество од m линеарно независни колони на матрицата A, нивните индекси ги додаваме на $\mathcal{B}$ и на тој начин образуваме ново множество $\mathcal{B}_1$, сега од точно m индекси. Бидејќи $\overline{x}_j = 0$, за $j \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}$, имаме дека важи $\overline{x}_j \geq 0$, за $j \in \mathcal{B}_1$, и $\overline{x}_j = 0$, за $j \notin \mathcal{B}_1$, од каде заклучуваме дека $\overline{x}$ е базно допустливо решение на системот (4.9). ∎

Теорема 4.7 (Фундаментална теорема на линеарно програмирање).

(i) Ако задачата на линеарно програмирање (4.8) има допустлива точка, тогаш таа има и базно допустливо решение.

(ii) *Ако задачата (4.8) има оптимални решенија, тогаш барем едно од нив е базно допустливо решение.*

(iii) *Ако задачата (4.8) има допустлива точка и функцијата на целта е ограничена, тогаш таа има оптимално решение.*

Доказ. (i) Нека $X \neq \emptyset$, тогаш од Теорема 4.4 следи дека X има екстремна точка, и според Теорема 4.6 таа точка е базно допустливо решение.
(ii) Нека задачата (4.8) има оптимални решенија има оптимални решенија, тогаш од Теорема 4.5 таа има оптимално решение кое е екстремна точка на допустливата област X, и според Теорема 4.6 тоа оптимално решение е базно допустливо решение.
(iii) Нека $X \neq \emptyset$ и нека $\overline{z} = \inf_{x\in X} c^T x$. Да претпоставиме дека задачата (4.8) нема оптимално решение, т.е. системот

$$Ax = b,\ \langle c, x\rangle = \overline{z},\ x \geq 0$$

нема решение во однос на $x \in \mathbb{R}^n$. Тогаш, нема решени ни системот

$$Ax - tb = 0,\ \langle c, x\rangle - t\overline{z} = 0,\ x \geq 0,\ t > 0$$

во однос на $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Според Лема на Фаркаш (да се дообјасни) постои $(y, \tau) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ така да

$$A^T y + \tau c \geq 0,\ \langle b, y\rangle + \tau\overline{z} < 0.$$

Тогаш, за произволен $x \in X$ од првото неравенство имаме

$$\langle A^T y, x\rangle + \tau\langle c, x\rangle \geq 0$$

од каде со користење на второто неравенство и тоа дека $Ax = b$ се добива

$$\tau\langle c, x\rangle \geq -\langle A^T y, x\rangle = -\langle y, Ax\rangle = -\langle y, b\rangle > \tau\overline{z}.$$

Значи имаме,

$$\inf_{x\in X} \tau\langle c, x\rangle > \tau\overline{z} = \tau \inf_{x\in X} \tau\langle c, x\rangle,$$

што не е можно за недно τ. Од добиената контрадикција, заклучуваме дека задачата (4.8) има оптимално решение. ∎