ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ
(геометриски пристап)

Ирена Стојковска

СОДРЖИНА[1]

[1] Текстовите презентирани во оваа верзија се објавувани статии во математичкото списание Нумерус во годината 2010-2011

1. Вовед. Системи од линеарни неравенства

А. Да претпоставиме дека треба да направиме мешавина од леблебија и суво грозје, но не сме сигурни за нивниот сооднос. Тоа што ни е познато се калориите и составот на ханливите состојки како јаглени хидрати и протеини кај секој од овие производи. Сакаме да го одредиме соодносот на леблебијата и сувото грозје така да ги минимизираме калориите или пак да ги максимизираме хранливите состојки на мешавината од леблебија и суво грозје.

Б. Една фабрика за играчки произведува два типа на играчки камиони. Познати се ресурсите со кои располага, како и пазарните цени на играчките. Фабриката треба да направи план на производството така да биде изложена на што е помалку тошок, односно да оствари што е можно поголема заработка.

В. Пензиониран брачен пар има одредена сума на пари која сака да ја инвестира. При познати услови на висина на инвестиците во одредени обрзници и позната повратна заработка од истите, нивниот брокер треба да одлучи како да го посоветува брачниот пар да инвестира, за да повратната заработка е што е можно повисока.

Ова се неколку од многуте случаи кога е потребно да се донесат **одлуки** (во кој сооднос да се направи мешавината од леблебија и суво грозје, или по колку парчиња од секоја играчка камион да произведе фабриката за играчки, или која сума на инвестиции да се инвестира во обврзниците), под одредени **ограничувања** (познати се количините, калориите и хранливите состојки на леблебијата и сувото грозје соодветно, односно познати се ресурсите за прозводство на играчките и нивните пазарни цени, односно познати се висините на инвестиците во одредени обрзници и позната повратна заработка од истите), за да се **оптимизира** (минимизира или максимизира) одредена измерлива количина (да се минимизираат калориите, максимизираат хранливите состојки на направената мешавина од различни производи, или да се минимизира трошокот при производството, максимизира профитот при продажбата, или да се максимизира повратната заработка при инвестирањето).

Доколку измерливата количина што треба да се оптимизира е некој линеарен израз, а променливите од тој израз се подложени на огранчувања кои може да се запишат преку систем од линеарни неравенства, решението на една таква задача на оптимизација може да се добие со помош на методи, постапки, техники на **линеарно програмирање**, а задачата се нарекува **задача на линеарно програмирање**.

Историски, задачите на линеарно програмирање потекнуваат од времето на Втората Светска Војна, кога за потребите на војската требало да се донесат одлуки во врска со распределување, искористување на ресурсите. Меѓу оние кои работеле на решавање на таквиот вид на проблеми бил Џорџ Данциг (George Dantzig) кој подоцна ја дал и општата формулација на задачата на линеарно програмирање и предложил метод за нејзино решавање, познат како симплекс метод.

Со цел да се резбере подобро поимот за задача на линерно програмирање како и да се усвои метод за нејзино решавање, овде ќе се задржиме на задачи со две променливи. Тоа значи дека ограничувањата се запишани преку **систем од линеарни неравенства** кои може да се претстават графички на координатен систем во рамнина, па следствено ќе биде изложен **геометриски пристап** во решавањето на задачата на линеарно програмирање со две променливи. Иако ќе работиме со еден од наједноставните облици на задача на линеарно програмирање, значителна е нивната **примена**, како што беше изложено на почетокот, примена во производството, инвестициите, понатаму примена во транспотрот, финансиите, прехраната.

На почетокот ќе се осврнеме на графичко прикажување на систем од линеарни неравенства, но чекор по чекор. Најнапред, графичко прикажување на линеарно неравенство.

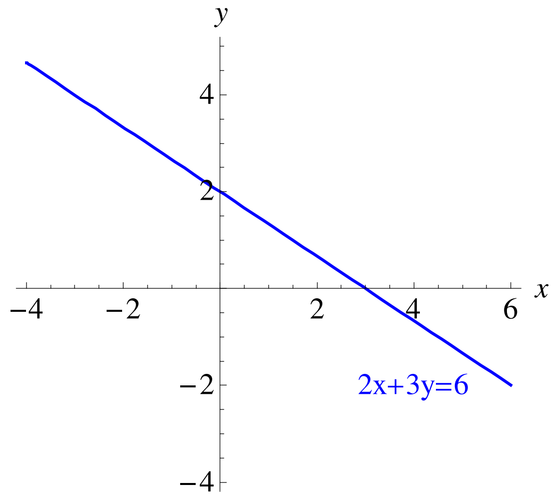
Граф на линеарно неравенство од две променливи x и y е множеството од сите точки (x, y) за кои е исполнето неравенството.

Пример 1. Точката $(1,4)$ припаѓа на графот на линеарното неравенство $2x+3y \geq 6$, затоа што $2\cdot 1+3\cdot 4=2+12=14\geq 6$. Но, затоа пак точката $(-1,1)$ не припаѓа на графот на линеарното неравенство $2x+3y\geq 6$, затоа што $2\cdot(-1)+3\cdot 1=-2+3=1<6$.

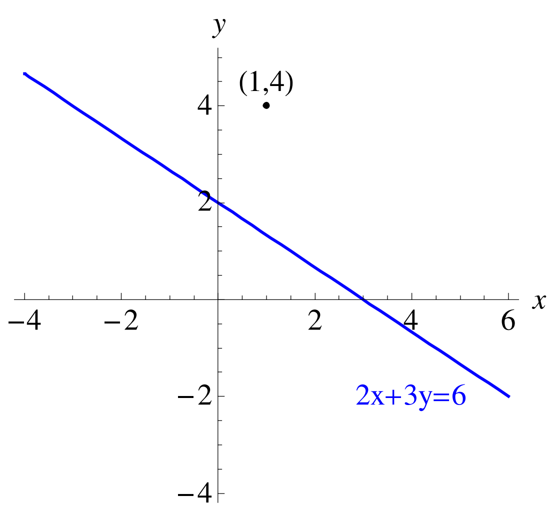
Природно е да се прашаме, дали постојат други и колку такви точки постојат, покрај точката $(1,4)$, за кои е исполнето неравенството $2x+3y\geq 6$? Па, наша задача ќе биде да ги прикажеме графички сите точки од графот на линеарното неравенство.

Постапка за графичко прикажување на линеарно неравенство.
Чекор 1. Нацртај ја соодветната права p која одговара на линеарната равенка која соодветсвува на линеарното неравенство (која се добива кога знакот за неравенство $<,>,\leq,\geq$ ќе се замени со знак за равенство $=$). Доколку неравенството е строго ($<$ или $>$), тогаш правата p нацртај ја со испрекината линија што значи дека точките од правата p не припаѓаат на графот на нелинеарното неравенство.
Чекор 2. Одбери точка P за тестирање која не припаѓа на правата p.
Чекор 3. Ако коодинатите на точката P го задоволуваат неравенството, тогаш секоја точка од рамнината која се наоѓа на иста страна од правата p каде е и точката P е точка од графот на линеарното неравенство и обој ја таа страна од правата p. Ако коодинатите на точката P не го задоволуваат неравенството, тогаш секоја точка од рамнината која се наоѓа на страната од правата p каде не е точката P е точка од графот на линеарното неравенство и обој ја таа страна од правата p.

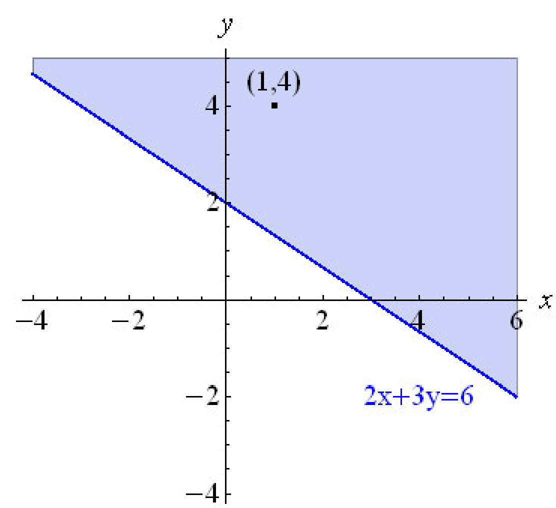
Пример 1. (продолжува) Графот на линеарната неравенка $2x+3y \geq 6$ е множеството од точки $\{(x,y) \mid 2x+3y \geq 6\}$. Според постапката за негово графичко прикажување, најнапред ја цртаме правата $2x+3y=6$ (Слика 1а), потоа избиране една точка од рамнината која не припаѓа на правата, нека е тоа точката $(1,4)$ (Слика 1б), и бидејќи погоре беше покажано дека оваа точка припаѓа на графот (затоа што $2\cdot 1+3\cdot 4=2+12=14\geq 6$), тоа значи дека сите точки од рамнината кои се наоѓаат од иста страна на правата $2x+3y=6$ како и точката $(1,4)$, се точки од бараниот граф, па таа страна од рамнината ја боиме (Слика 1в). Да напоменеме дека заради етапно изложување на постапката за графичко прикажување на нелинеарно неравенство тука се дадени три цртежа, но доволен е само еден, последниот цртеж, како што е прикажано во следните примери.



Слика 1а.

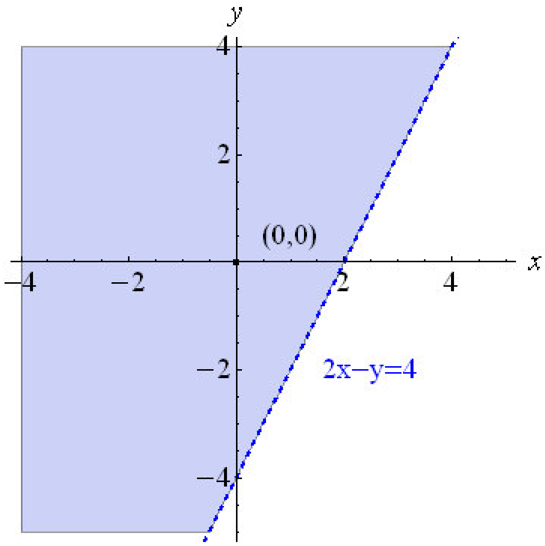


Слика 1б.

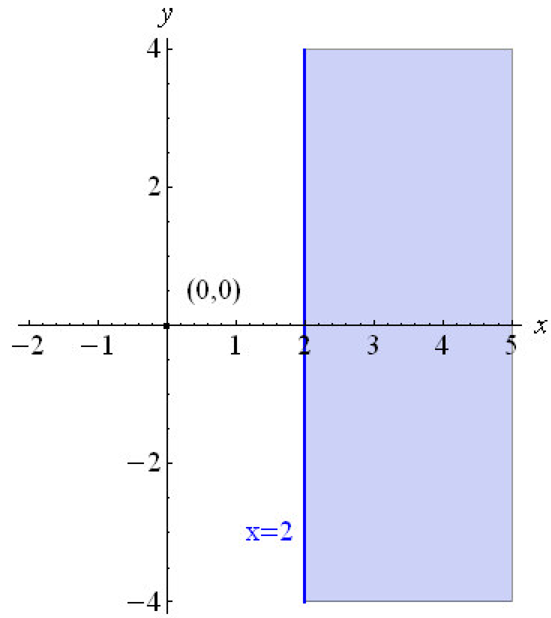


Слика 1в.

Пример 2. За да го нацртаме графот на линеарната неравенка $2x-y<4$, најнапред ја цртаме правата $2x-y=4$ со испрекината линија заради знакот за строго неравенство, потоа избираме една точка од рамнината која не припаѓа на правата, на пример точката $(0,0)$ што во принцип е најпогодна за проверка, и бидејќи $2\cdot 0-0=0<4$, односно точката $(0,0)$ го задоволува неравенството $2x-y<4$, тоа значи дека сите точки од истата страна на рамнината поделена со правата $2x-y=4$ каде се наоѓа и точката $(0,0)$ го формираат бараниот граф (Слика 2).



Слика 2.



Слика 3.

Пример 3. Графот на линеарната неравенка $x \geq 2$ го цртаме така да прво ја цртаме правата $x=2$, тоа е права паралелна со y-оската која минува низ точката $(2,0)$ на x-оската, потоа ја земаме точката $(0,0)$ за тестирање и бидејќи $0<2$, односно точката $(0,0)$ не го задоволува неравенството $x \geq 2$, заклучуваме дека сите точки од рамнината кои се наоѓаат во оној дел од рамнината поделен со правата $x=2$ каде не е точката $(0,0)$ го формираат бараниот граф (Слика 3).

Задача 1. Нацртај го графот на секоја од следните неравенки:

а) $5x+y \geq 10$ б) $x+5y<5$ в) $2x \leq y$ г) $x \geq 0$ д) $y \geq 0$

Сега може да преминеме на графичко прикажување на граф на систем од линеарни неравенства што претставува збир од две или повеќе неравенки.

Граф на систем од линеарни неравенства од две променливи x и y е множеството од сите точки (x,y) за кои е исполнето секое од неравенствата во системот.

Интересно е да се забележи дека може да се случи да не постои точка од рамнината која го задоволува секое од неравенството во системот. Во тој случај графот е празно множество $\varnothing$, како што е прикажано со еден од следните примери.

Пример 4. Нека е даден следниот систем од линеарни неравенки

$$\begin{cases} 2x+y \leq 6 \\ x-y \geq 3 \end{cases}.$$

За точката $(6,1)$ имаме дека $2 \cdot 6 + 1 = 12 + 1 = 13 > 6$ и $6 - 1 = 5 \geq 3$, што значи дека таа не го задоволува првото неравенство, но го задоволува второто. Заклучуваме дека $(6,1)$ не е точка од графот на системот.

За точката $(3,4)$ имаме дека $2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10 > 6$ и $3 - 4 = -1 < 3$, што значи дека таа не го задоволува ниедно од неравенствата. Заклучуваме дека $(3,4)$ не е точка од графот на системот.

За точката $(1,2)$ имаме дека $2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \leq 6$ и $1 - 2 = -1 < 3$, што значи дека таа го задоволува првото неравенство, но не го задоволува второто. Заклучуваме дека $(1,2)$ не е точка од графот на системот.

За точката $(2,-3)$ имаме дека $2 \cdot 2 + (-3) = 4 - 3 = 1 \leq 6$ и $2 - (-3) = 5 \geq 3$, што значи дека таа ги задоволува и двете неравенства. Заклучуваме дека $(2,-3)$ е точка од графот на системот.

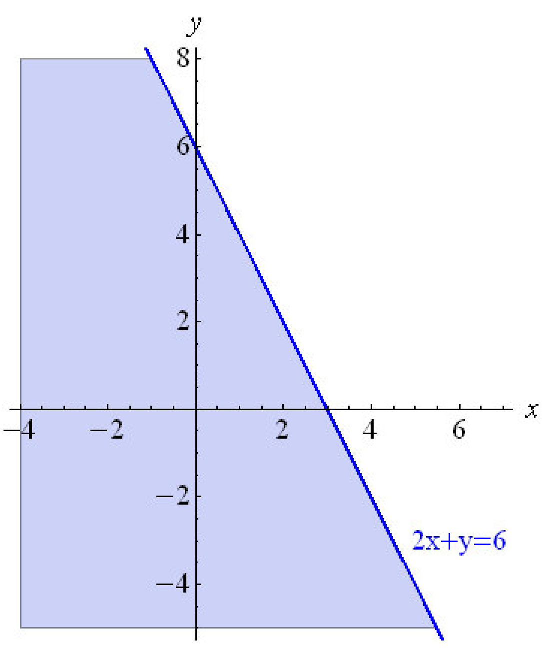
Повторно природно се наметнува прашањето како да ги најдеме сите точки кои припаѓаат на графот од системот од Пример 4, како да ги прикажеме графички? Ако графот на систем од линеарни неравенства го интерпретираме како пресек на графовите на секое од неравенствата, тогаш знаејќи ја постапката за графичко прикажување на линеарно неравнство, графичкиот приказ на системот е оној дел од рамнината каде се преколопуваат боите кои одговараат на секое од неравенствата од системот.

Пример 4. (продолжува) За графот на системот

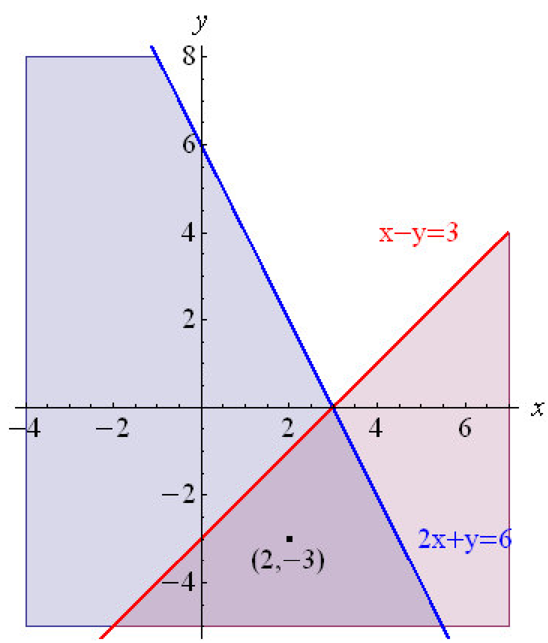
$$\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x - y \geq 3 \end{cases}$$

важи следното равенство

$$\{(x,y) \mid 2x + y \leq 6 \text{ и } x - y \geq 3\} = \{(x,y) \mid 2x + y \leq 6\} \cap \{(x,y) \mid x - y \geq 3\}.$$



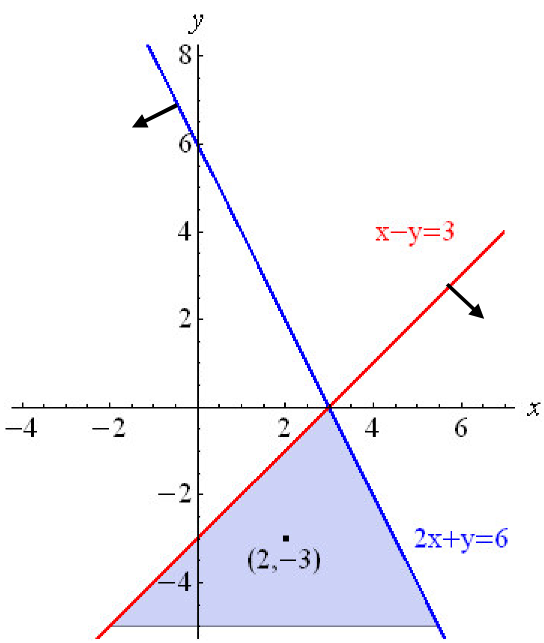
Слика 4а.



Слика 4б.

Затоа, прво го прикажуваме графички неравенството $2x+y\le 6$ (Слика 4а), потоа и неравенството $x-y\ge 3$ (Слика 4б) од каде го согледуваме пресекот на двата графа и го прикажуваме само делот од рамнината кој припаѓа на графот на системот (Слика 4в).

Забележуваме дека во овој пример, со помош на правите $2x+y=6$ и $x-y=3$ рамнината е поделена на четири дела, и графичкиот приказ на графот на системот е оној од четирите дела каде се наоѓа точката $(2,-3)$, за која претходно покажавме дека припаѓа на графот на системот (бидејќи нејзините координати ги исполнуваат и двете неравенства, т.е. $2\cdot 2+(-3)=4-3=1\le 6$ и $2-(-3)=5\ge 3$), Слика 4б. Па, друг начин за графички приказ на системот е со поверка на по една точка од секој дел од рамнината поделена со правите кои содветсвуваат на неравенствата и боење на оној дел од рамнината каде се наоѓа точката која припаѓа на графот. Но, овој начин може да биде доста неефикасен, затоа што веќе за систем од три линеарни неравенки може да се случи да треба да се направат проверки за седум точки, а за систем од четири линеарни неравенки може да се случи да треба да се направат проверки за девет точки.



Слика 4в.

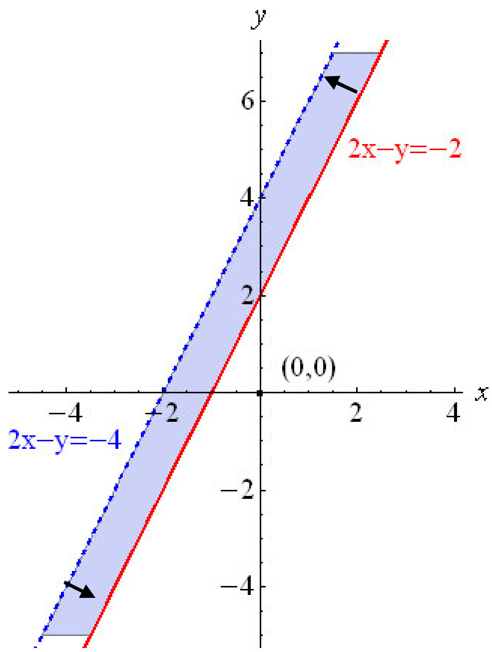
Затоа, предлагаме начин малку поинаков од боењето на делот од рамнината на секоја од неравенките од системот или правењето проверка на по една точка од секој од деловите од рамнината формирани со правите кои одговараат на неравенките дали припаѓа на графот на системот. Новиот начин подразбира означување со насочени стрелки кон деловите од рамнината кои би требале да се обојат за секоја од неравенките од системот, и крајниот резултат е оној дел од рамнината формиран со правите кои одговараат на неравенките, кон кој се насочени секоја од стрелките (Слика 4в).

Пример 5. При цртање на графот на системот од линеарни неравенки

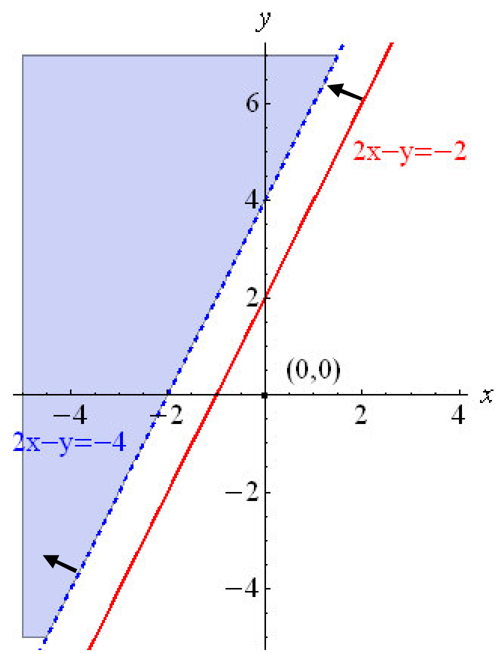
$$\begin{cases}2x-y>-4\\2x-y\le -2\end{cases}.$$

најнапред ја цртаме правата $2x-y=-4$ со испрекината линија (заради знакот на строго неравенство), проверуваме дали точката $(0,0)$ припаѓа на графот на неравенката $2x-y>-4$, и бидејќи $2\cdot 0-0=0>-4$, односно припаѓа, ја поставуване насочената стрелка кон тој дел од рамнината каде се наоѓа точката $(0,0)$. Истото го правиме и за второто неравенство. Ја цртаме правата

$2x - y = -2$, проверуваме дали точката $(0,0)$ припаѓа на графот на неравенката $2x - y \le -2$, и бидејќи $2 \cdot 0 - 0 = 0 > -2$, односно не припаѓа, ја поставуваме насочената стрелка кон другиот дел од рамнината. Делот од рамнината кон кој се насочени и двете стрелки одговара на графот на системот (Слика 5).



Слика 5.



Слика 6.

Пример 6. Со измена на знакот на неравенство во првата неравенка од Пример 5, го добиваме следниот систем од линеарни неравенки

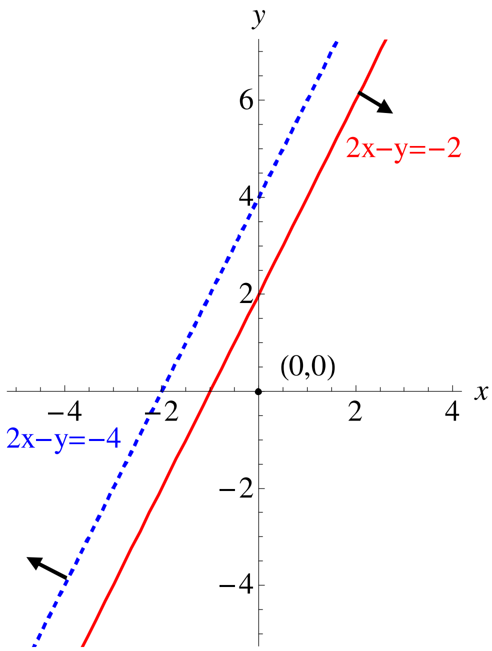
$$\begin{cases} 2x - y < -4 \\ 2x - y \le -2 \end{cases}.$$

Цртањето на графот на овој систем е слично како при Пример 5, правите кои одговараат на неравенките се истите, различно е само насочувањето на стрелките. Односно, по проверката $2 \cdot 0 - 0 = 0 \ge -4$ и $2 \cdot 0 - 0 = 0 > -2$ заклучуваме дека точката $(0,0)$ не припаѓа на ниеден од графовите на неравенките, што значи дека стрелките ги насочуваме кон оние делови од рамнината каде не се наоѓа точката $(0,0)$. Како резултат на тоа го добиваме графичкиот приказ на графот како дел од рамнината кон кој се насочени двете стрелки, што во овој случај се поклопува со графот на првата неравенка (Слика 6), имено ако за една точка (x, y) е исполнето неравенството $2x - y < -4$, тогаш ќе биде исполнето и неравенството $2x - y \le -2$.

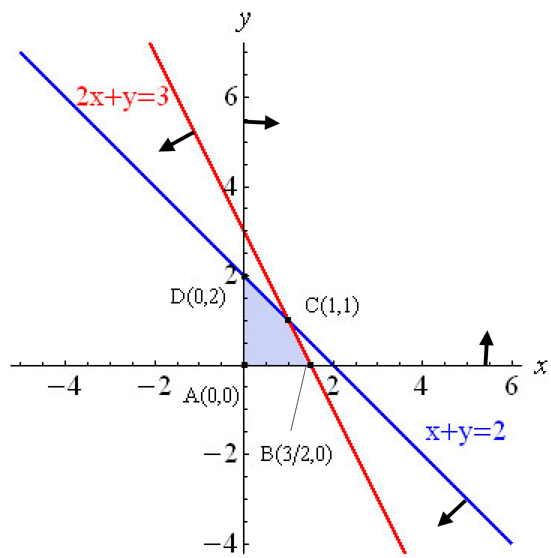
Пример 7. Доколку и кај двете неравенки од системот од Пример 5 им се поставaт обратни знаци за неравенство се добива следниот систем од линеарни неравенки

$$\begin{cases} 2x - y < -4 \\ 2x - y \ge -2 \end{cases}.$$

По цртањето на правите кои одговараат на линарните неравенки, насочените стрелки ги поставуваме обратно од истите кај Пример 5. Согледуваме дека не постои точка од рамнината кон која се истовемено насочени и двете стрелки, па затоа графот на овој систем е празно множество (Слика 7).



Слика 7.



Слика 8.

Пример 8. Цртањето на граф на систем од повеќе од две линеарни неравенки се прави на сосема ист начин, цртање на правите кои одговараат на неравенките, поставување на насочените стрелки и соглдедување на делот од рамнината кон кој се насочени сите стрелки. Да го илустрираме ова на следниот систем од четири линеарни неравенки

$$\begin{cases} x+y\le 2 \\ 2x+y\le 3 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}.$$

По цртање на правата $x+y=2$, проверуваме дали точката $(0,0)$ припаѓа на графот на неравенката $x+y\le 2$, односно од $0+0=0\le 2$ заклучуваме дека припаѓа, па стрелката ја насочуваме кон делот од рамнината каде се наоѓа таа. Потоа ја цртаме правата $2x+y=3$ и проверуваме повторно за $(0,0)$, и бидејќи $2\cdot 0+0=0\le 3$ заклучуваме дека $(0,0)$ припаѓа на графот на неравенката $2x+y\le 3$ и насочената стрелка ја поставуваме кон делот од рамнината каде се наоѓа точката $(0,0)$. Правите $x=0$ и $y=0$ се соодветно y-оската и x-оската. Делот од рамнината кој одговара на неравенката $x\ge 0$ е десно од y-оската, додека делот од рамнината кој одговата на неравенката $y\ge 0$ е над x-оската. Па, делот од рамнината кон кој се насочени сите стрелки е заграден со отсечките AB, BC, CD, DA, каде $A(0,0)$, $B(\frac{3}{2},0)$, $C(1,1)$, $D(0,2)$, Слика 8. Да забележиме дека точките A, B, C, D се пресечни точки на правите кои одговараат на неравенствата и аналитички се добиваат при решавање на систем од две линеарни равенки. Овие точки се нарекуваат **темиња** на областа определена со системот линеарни неравенки.

Задача 2. Нацртај го графот на секој од системите од линеарни неравенки:

а) $\begin{cases} 6x-5y \leq 5 \\ 2x+4y \geq 10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-5y \geq 0 \\ x+3y \geq 15 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+2y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y \geq 2 \\ 2x+3y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Како што беше спомнато на почетокот, задачата на линеарно програмирање има ограничувања кои може да се запишат како систем од линеарни неравенки. Пред да преминеме на решавање, а пред се на формулирање на задача на линеарно програмирање, ќе се задржиме на формирање на системот ограничувачки неравенства за даден проблем.

Пример 9. Располагаме со 1200 грама леблебија и 1920 грама суво грозје. Овие два производа треба да се измешаат во пакувања од по 16 грама, така да ниско калоричното пакување содржи 4 грама леблебија и 12 грама суво грозје, додека високо калоричното пакување содржи 8 грама леблебија и 8 грама суво грозје. Како изгледа системот ограничувачки неравенства за овој проблем?

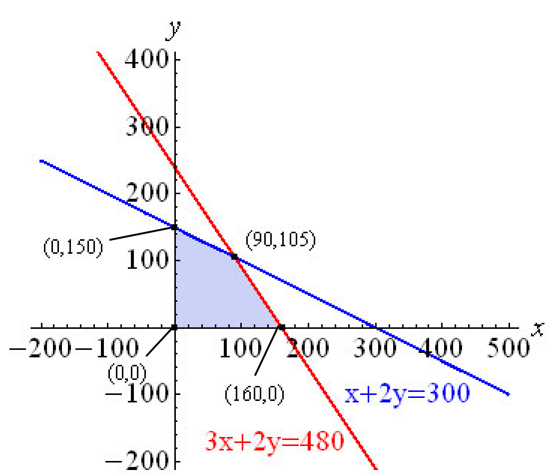
Најнапред ги дефинираме променливите. Бидејќи проблемот е во начинот на пакување на леблебијата и сувото грозје, природно се наметнуваат променилвите

x - број на ниско калорични пакувања,

y - број на високо калорични пакувања.

Првите ограничувања се однесуваат на ненегативноста на бројот на пакувања, па така имаме

$$x \geq 0 \quad \text{и} \quad y \geq 0.$$



Слика 9.

За ниско калоричните пакувања би се потрошиле $4 \cdot x$ грама леблебија, а за високо калоричните пакувања би се потрошиле $8 \cdot y$ грама леблебија. И бидејќи располагаме со 1200 грама леблебија, тоа значи не можеме да потрошиме повеќе од тоа при формирањето на пакувањата. Така го добиваме ограничувањето

$$4x+8y \leq 1200.$$

Расудувајќи на сличен начин за сувото грозје, се добива ограничувањето

$$12x+8y \leq 1920.$$

Значи, системот од ограничувачки линеарни неравенки е следниот

$$\begin{cases} 4x+8y\le 1200 \\ 12x+8y\le 1920 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+2y\le 300 \\ 3x+2y\le 480 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}.$$

Графот на овој систем е прикажан на Слика 9, при што негови темиња се точките $(0,0)$, $(160,0)$, $(90,105)$ и $(0,150)$.

Задача 3. Формирај го и илустрирај го системот ограничувачки неравенства за следниот проблем: Еден фармер треба да направи мешавина од два типа на зрнеста храна за прехрана на секое од животните. Секоја единица од првиот тип зрнеста храна содржи 1 единица протеини и 5 единици железо, додека секоја единица од вротиот тип зрнеста храна содржи 2 единици протеини и 1 единица железо. Секое од животните треба да прими најмалку 5 единици протеини и 16 единици железо секој ден.

Следниот пат ќе биде искористено графичкото претставување на систем од линеарни неравенки за геометриски пристап кон решавање на задача на линеарно програмирање.

2. Геометриски пристап

Во претходниот дел беше изложен начинот за графичко претставување на систем од линеарни неравенки. Во овој дел ќе го искористиме тој начин за геометриски пристап при решавање на задача на линеарно програмирање. Но, најнапред да ја формулираме задачата на линеарно програмирање за последниот Пример 9, при дополнителни услови.

Пример 9 (продолжува). Тоа што до сега ни е познато е дека, располагаме со 1200 грама леблебија и 1920 грама суво грозје. Овие два производа треба да се измешаат во пакувања од по 16 грама, така да ниско калоричното пакување содржи 4 грама леблебија и 12 грама суво грозје, додека високо калоричното пакување содржи 8 грама леблебија и 8 грама суво грозје.
Дополнителните информации се однесуваат на заработката од продажбата на овие пакувања, имено нека заработката од продажбата на секое ниско калорично пакување е 25 ден., а заработката од продажбата на секое високо калорично пакување е 45 ден. И бидејќи со x и y ги означивме бројот на ниско, односно високо калорични пакувања, следи дека вкупната заработка Z може да се прикаже со линеарниот израз

$$Z = 25x + 45y,$$

под претпоставка дека сите пакувања се продадени. Нашата задача се состои во одредување на бројот на ниско, односно високо калорични пакувања (x и y) за кои би ја максимизирале заработката (Z).
Оваа задача е типичен пример за **задача на линеарно програмирање**. Линераниот израз (во овој случај заработката Z) кој треба да се оптимизира (во овој случај да се максимизира) се нарекува **функција на целта**, додека системот од ограничувачки линеарни неравенки (кој го формиравме во претходното излагање на Пример 9) се нарекуваат **ограничувања**. Па, задачата на линеарно програмирање која одговара на овој пример може да се преформулира како

$$\max Z := 25x + 45y$$

$$\begin{cases} x + 2y \le 300 \\ 3x + 2y \le 480 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Во општ случај една задача на линеарно програмирање се состои од два дела: линеарен израз кој треба да се минимизира или максимизира и систем од ограничувачки линеарни неравенки кои формираат **допустлива област** над која се изведува оптимизацијата.

Задача на линеарно програмирање.
Една **задача на линеарно програмирање** од две променливи x и y се состои од минимизирање или максимизирање на **функција на целта**

$$z = Ax + By$$

каде A и B се реални броеви кои не се истовремено и двата нула, при услов на **ограничувања** изразени преку систем од линеарни неравенки од x и y.

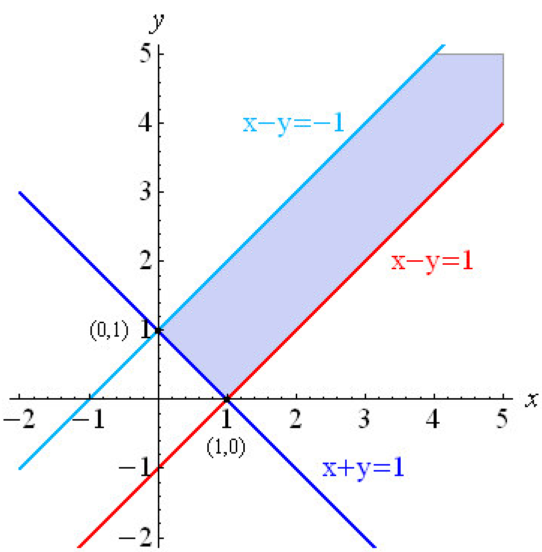
За да го минимизираме или максимизираме количеството $z = Ax + By$ треба да најдеме, ако постојат, точка или точки од допустливата област наречени **допустливи точки** во кои z ја достигнува својата најмала односно најголема вредност. Тоа значи дека **решение на задача на линеарно програмирање** е точката (x, y) која ги задоволува ограничувачките линеарни неравенства, и која го минимизира или максимизира изразот $z = Ax + By$. Ако не постои таква допуслива точка или ако не постојат допустливи точки (допустловата област е празно множество), тогаш велиме дека задачата на линеарно програмирање нема решение.

Пример 10. Да ја решиме следната задача на линеарно програмирање

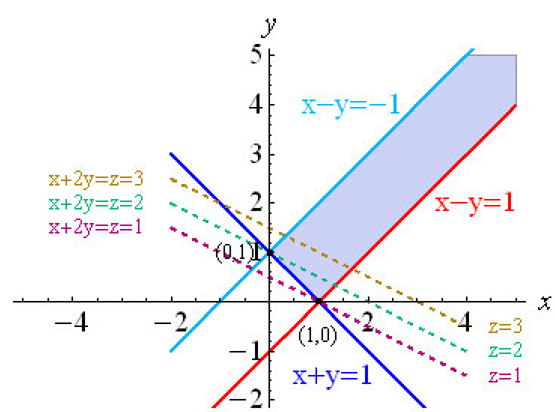
$$\min z := x + 2y$$

$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Областа над која треба да оптимизираме, односно множеството допустливи точки, односно графичкиот приказ на системот ограничувачки неравенства е даден со Слика 10а.



Слика 10а



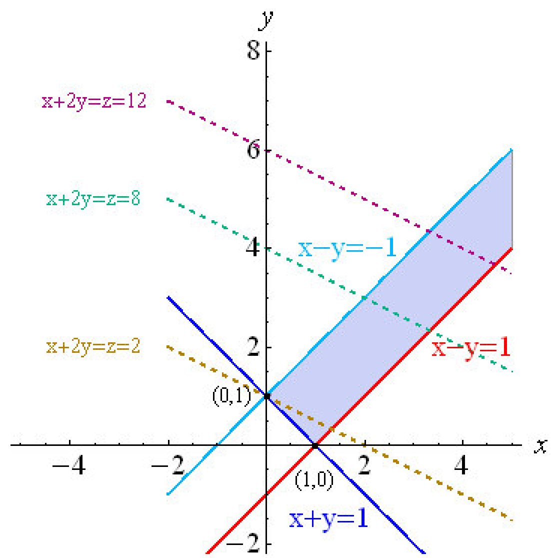
Слика 10б

Сакаме да ја најдеме најмалата вредност за z, па ја цртаме правата $z = x + 2y$ за некој избор на z, на пример за $z = 3$ (Слика 10б). Со паралелно поместување на правата $x + 2y = 3$ може да се надгледува што се случува за различни врдности на z. Бидејќи бараме минимална вредност за z, треба да ја поместиме кон долу правата $z = x + 2y$ колку е можно повеќе, но така да се уште има пресечни точки со допустливата област. Најдобро решение се достигнува кога правата која ја поместуваме допира темена точка од допустливата област (Слика 10б). Спред тоа, решение на оваа задача на линеарно прграмирање е $x=1, y=0$, со најмала вредност на функцијата на целта $z=1$. Имено, не постојат други допустливи точки за кои z прима помала вредност.

Пример 11. Доколку во Пример 10 наместо минимизирање на функцијата на целта разгледуваме максимизирање ќе ја добиеме следната задача на линеарно програмирање

$$\max z := x+2y$$

$$\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-y \leq 1 \\ x-y \geq -1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Слика 11

Расудувајќи на сличен начин, најнапред ја цртаме допустливата област, а потоа ги цртаме правите $z=x+2y$ за различни вредности на z стремејќи се да најдеме што е можно поголема вредност за z се додека правата $z=x+2y$ има заеднички пресечни точки со допустливата област (Слика 11).

Но, лесно се забележува дека колку и да земеме голема вредност за z секогаш ќе се најде уште поголема вредност од неа за која правата $z=x+2y$ има заеднички пресечни точки со допустливата област. Тоа значи дека не постои најголема вредност за z, односно не постои допустлива точка која го максимизира z заклучуваме дека оваа задача на линеарно програмирање нема решение.

Доколку една задача на линеарно програмирање има решение тогаш за неа важи следната фундаментална теорема на линеарно програмирање. (Со проблемот за егзистенција, односно постоење на решение на една задача на линеарно програмирање нема да се справуваме тука. За негово разгледување има потреба од нкои нови поими, како ограниченост на област и слично.)

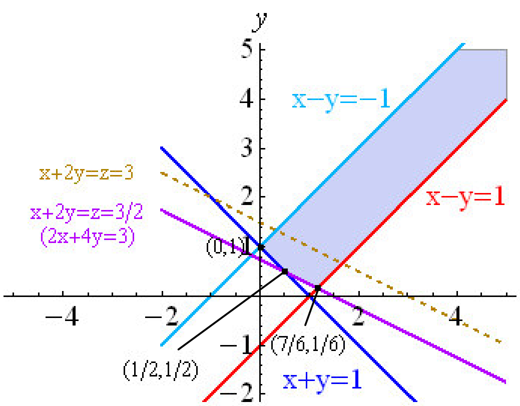
Фундаментална теорема на линеарното програмирање.
Ако задачата на линеарно програмирање има решение, тоа се наоѓа во некое теме на допустливата област, доколку задачата на линеарно програмирање има повеќе решенија, тогаш барем едно од нив е сместено во некое теме на допустливата област. Во двата случаја оптималната вредност на функцијата на целта е единствена.

Пример 12. Ако во задачата од Пример 10 додадеме уште едно ограничувачко неравенство $2x+4y\geq 3$ ја добиваме следната задача на линеарно програмирање

$$\min z := x+2y$$

$$\begin{cases} x+y\geq 1 \\ x-y\leq 1 \\ x-y\geq -1 \\ 2x+4y\geq 3 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Нејзината допустлива област заедно со неколку избори за z се дадени на Слика 12. Согледуваме дека поместувајќи ја правата $z=x+2y$ кон долу наоѓаме дека минимумот се достигнува кога $z=\frac{3}{2}$ и во тој случај секоја точка од правата $2x+4y=3$ меѓу темињата $(\frac{7}{6},\frac{1}{6})$ и $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ вклучувајќи ги и овие темиња ја минимизира функцијата на целта. Ова е пример за задача на линеарно програмирање со бесконечно многу решенија (и единствена минимална вредност за функцијата на целта $z=\frac{3}{2}$).



Слика 12

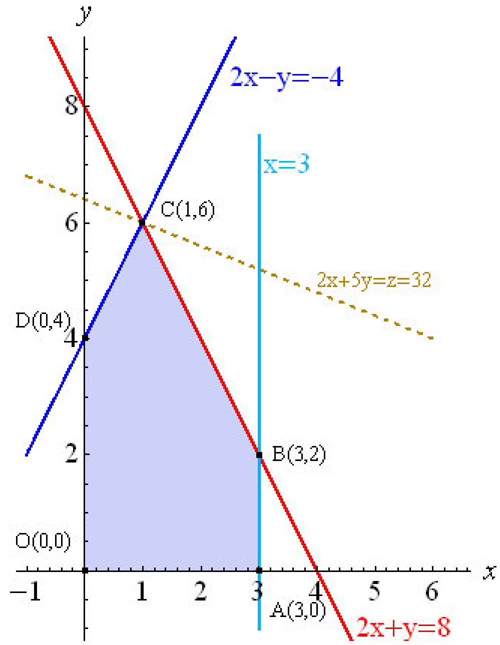
Бидејќи една задача на линеарно програмирање го достигнува својот оптимум во некое теме на допустливата област, може да ја изложиме постапката за графички пристап при решавање на задача на линеарно програмирање која има решение.

Постапка за решавање на задача на линеарно програмирање (геометриски пристап).
Ако една задача на линеарно програмирање има решение, тоа се наоѓа следејќи ги чекорите:
Чекор 1. Одреди го изразот кој одговара на количеството кое треба да се минимизира или максимизира (т.е. одреди ја функцијата на целта).
Чекор 2. Одреди ги ограничувачките неравенства и прикажи го графички системот од ограничувачки линеарни неравенки (т.е. илустрирај ја допустливата област).
Чекор 3. Најди ги темињата на допустливата област.
Чекор 4. Одреди ја вредноста на функцијата на целта во секое теме.
Чекор 5. Одбери ја минималната, односно максималната вредност на функцијата на целта, и точката во која таа се достигнува е решение на задачата на линеарно програмирање.

Пример 13. Да ја решиме следната задача на линеарно програмирање

$$\max z := 2x + 5y$$

$$\begin{cases} 2x - y \geq -4 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Слика 13

Допустливата област е прикажана на Слика 13 од каде согледуваме дека таа е заградена со отсечките OA, AB, BC, CD, DO, па може слободно да се каже дека: **секоја функција на цел го достигнува својот минимум и максимум на допустлива област заградена со отсечки**. Значи, оваа задача на линеарно програмирање има решение. Следно, ги пресметуваме вредностите на функцијата на целта во секое теме од допустливата област.

теме (x, y)	вредност на функцијата на целта $z = 2x + 5y$	
$(0,0)$	$z = 2\cdot 0 + 5\cdot 0 = 0$	
$(3,0)$	$z = 2\cdot 3 + 5\cdot 0 = 6$	
$(3,2)$	$z = 2\cdot 3 + 5\cdot 2 = 06 + 10 = 16$	
$(1,6)$	$z = 2\cdot 1 + 5\cdot 6 = 2 + 30 = 32$	← max
$(0,4)$	$z = 2\cdot 0 + 5\cdot 4 = 20$	

Согледуваме дека најголема вредност z достигнува во темето $(1,6)$, што претставува решение на оваа задача на линеарно програмирање, додека најголемата вредност на функцијата на целта е $z = 32$. Навистина правата $z = 2x + 5y$ за $z = 32$ не може паралелно да се помести уште погоре, а се уште да има заеднички точки со допустливата област (Слика 13).

Пример 9 (продолжува). Последниот пат беше формирана задачата на линеарно програмирање за наоѓање на максималната заработка (Z) од продажбата на пакувањата со мешавина од леблебија и суво грозје и бројот на ниско (x) и високо (y) калорични пакувања за кои се достигнува таа максимална заработка, односно

$$\max Z := 25x + 45y$$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Допустливата област на оваа задача, односно графичкиот приказ на системот ограничувачки линеарни неравенства беше дадена на Слика 9, од каде се согледува дека таа е заградена со отсечки и следствено функцијата на целта го достигнува својот максимим во некое од темињата $(0,0)$, $(160,0)$, $(90,105)$ или $(0,150)$. Слично како во Пример 13, правиме тебела за пресметување на вредностите на функцијата на целта во секое теме.

теме (x, y)	вредност на функцијата на целта $z = 25x + 45y$	
$(0,0)$	$z = 25 \cdot 0 + 45 \cdot 0 = 0$	
$(160,0)$	$z = 25 \cdot 160 + 45 \cdot 0 = 4000$	
$(90,105)$	$z = 25 \cdot 90 + 45 \cdot 105 = 2250 + 4725 = 6975$	$\longleftarrow$ max
$(0,150)$	$z = 25 \cdot 0 + 45 \cdot 150 = 6750$	

Од табелата се согледува дека максималниот профит од 6975 ден. ќе се одтвари доколу се направат 90 ниско калорични пакувања и 105 високо калорични пакувања. Во тој случај се постигнува знакот на равенство во првите две ограничувачки неравенства, имено

$$x + 2y = 90 + 2 \cdot 105 = 90 + 210 = 300 \text{ и}$$
$$3x + 2y = 3 \cdot 90 + 2 \cdot 105 = 270 + 210 = 480$$

што значи дека сме ги искористиле целите расположливи количества од леблебија и суво грозје.

Задача 4. Колку ниско калорични, а колку високо калорични пакувања треба да се направат, за да се максимизира заработката (под претпоставка дека сите пакувања се продадени), ако се знае дека заработката од продажбата на секое ниско калорично пакување е 20 ден., а заработката од продажбата на секое високо калорично пакување е 50 ден.

Задача 5. Реши ги следните задачи на линеарно програмирање:

а) $\max z := 2x + 3y$, $\begin{cases} x + y \le 2 \\ y \le x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

б) $\max z := 5x + 7y$, $\begin{cases} x + y \ge 2 \\ x + y \le 8 \\ 2x + y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

в) $\min z := 3x + 6y$, $\begin{cases} x + y \le 10 \\ 2x + y \ge 10 \\ x + 2y \ge 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

г) Најди ја најголемата вредност на изразот $z = -12x + 24y$ при ограничувања $x \le 15$, $y \le 10$, $3x + 3y \ge 9$, $-3x + 2y \le 14$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

д) Најди ги најмалата и најголемата вредност на изразот $z = 20x + 16y$ при ограничувања $4x + 3y \ge 12$, $-2x + 4y \le 16$, $6x - y \le 18$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

3. Примени

Задачите на линеарно програмирање наоѓаат примена во многу области како производството, инвестициите, транспортот, финансиите, прехраната и слично. Во понатамошниот текст ќе бидат изложени некои од примените.

Пример 14. Производство - Максимизаирање на заработката. Една фабрика за играчки произведува два модела на камиончиња - стандарден и луксузен. За производството на секое парче од стандардниот модел потребни се 2 часа за изработка на деловите и 2 часа за нивно составување, додека за производство на секое парче од луксузниот модел потребни се 2 часа за изработка на деловите и 4 часа за нивно составување. Фабриката поседува две машини за изработка на деловите и три машини за составување и секоја од овие машини работи најмногу по 40 часа неделно. На секое парче од стандардниот модел фабрката заработува по 30 ден., додека на секое парче од луксузниот модел заработува по 40 ден. Под претпоставка дека секое произведено камионче ќе биде продадено, по колку парчиња од секој модел треба да се произведат за да се максимизира заработката?

Решение.

Често при решавање на реалните проблеми на линеарно програмирање, најнапред дадените податоци во задачата се внесуваат во **табела на проблемот**. Така, ја составуваме следната табела на проблемот.

	изработка	составување	заработка
стандарден модел	2 часа	2 часа	30 ден.
луксузен модел	2 часа	4 часа	40 ден.
вкупно (максимум часови неделно)	$2\cdot 40$ часа	$3\cdot 40$ часа	

Во горната табела дадени се бројот на часови потребни за изработка и составување на деловите за секое парче од стандардниот и луксузниот модел соодветно, како и заработката по парче за секој од моделите. Последната редица (вкупно) е пополнета според податокот дека фабриката поседува 2 машини за изработка на деловите и 3 машини за составување и секоја од овие машини работи најмногу по 40 часа неделно.

Следно е дефинирање на **одлучувачките променливи**. Во овој проблем тоа се x - бројот на парчиња од стандардниот модел кои треба да се произведат за една недела, и y - бројот на парчиња од луксузниот модел кои треба да се произведат за една недела.

Тогаш, заработката за една недела е $Z = 30x + 40y$ денари и ја претставува **функцијата на целта** за проблемот која треба да се максимизира.

Табелата на проблемот помага при одредување на **ограничувањата** за проблемот. Знаеме дека за производство на едно парче од стандардниот модел потребни се 2 часа за изработка на деловите, и за производство на едно парче од луксузниот модел потребни се 2 часа за изработка на деловите. Тогаш, вкупниот број на часови неделно за изработка на делови за x парчиња од стандардниот модел и y парчиња од луксузниот модел е $2x + 2y$. Бидејќи, фабриката може да "обезбеди" најмногу $2\cdot 40 = 80$ часа неделно за изработка на делови, го добиваме првото ограничување $2x+2y\le 80$. Второто ограничување го формираме на сличен начин, имено тоа се однесува на бројот на неделни часови за составување на деловите, односно $2x+4y\le 120$. Овие ограничувања и огранучувањата за ненегативност на промепливите $x\ge 0$ и $y\ge 0$ (бројот на произведени парчиња неделно) го формираат **системот од ограничувања**

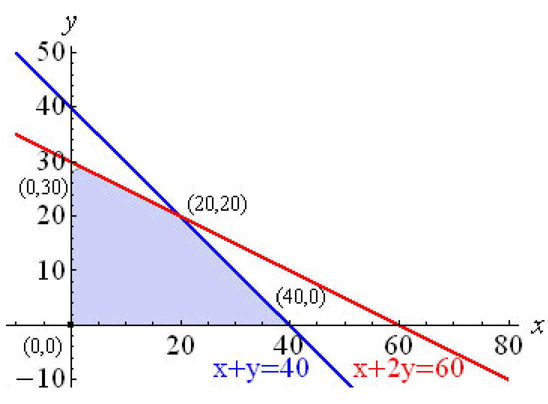
$$\begin{cases} 2x+2y\le 80 \\ 2x+4y\le 120 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\le 40 \\ x+2y\le 60 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

па соодветната **задача на линеарно програмирање** е

$$\max Z := 30x+40y$$

$$\begin{cases} x+y\le 40 \\ x+2y\le 60 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Претходно беше изложен **геометрискиот пристап** за решавање на задачата на линеарно програмирање. Да се потсетиме. Тој подразбираше најнапред претставување на допустливата област на координатен систем, односно графички приказ на ограничувачките неравенства. Потоа, одредување на вредноста на функцијата на целта во секое од темињата од допустливата област. И доколку допустливата област е заградена со отсечки, тогаш може да кажеме дека функцијата на целта ги достигнува својот максимум и минумум во некое од нејзините темиња. На Слика 14 е прикажана допустливата област од каде се согледува дека нејзини темиња се точките $(0,0)$, $(40,0)$, $(20,20)$ и $(0,30)$.



Слика 14

Потоа, од табелата во која е пресметана функцијата на целта во секое од темињата се согледува дека функцијата на целта го достигнува својот максимум во точката $(20,20)$.

теме (x,y)	вредност на функцијата на целта $z=30x+40y$	
$(0,0)$	$z=30\cdot 0+40\cdot 0=0$	
$(40,0)$	$z=30\cdot 40+40\cdot 0=1200$	
$(20,20)$	$z=30\cdot 20+40\cdot 20=600+800=1400$	← max
$(0,30)$	$z=30\cdot 0+40\cdot 30=1200$	

Тоа значи дека, фабриката ќе оствари максимална заработка од 1400 ден. неделно, ако произведе 20 парчиња од стандардниот модел камиончиња и 20 парчиња од луксузниот модел камиончиња.

Пример 15. Инвестиции - Финансиско планирање. Пензиониран брачен пар има 30000 ден. кои планира да ги инвестира во обврзници со фиксна повратна заработка. Нивниот брокер ги советува да инвестираат во два типа на обврзници, тип А од кој би добиле повратна заработка од 8% и тип В од кој би добиле повратна заработка од 12%. Откако го разгледале предлогот, брачниот пар одлучил да инвестира најмногу 12000 ден. во обврзниците од тип А, и најмалку 6000 ден. во обврзниците од тип В. Тие исто така планираат да инвестициите во обврзниците од тип В да се поголеми или еднакви на инвестивиите во обврзниците од тип А. Која одлука треба да ја донесат при инвестирањето за да реализираат најголема заработка?

Решение.

Табелата на дадениот проблем на инвестиции е следната.

	инвестиции	повратна заработка
обврзници тип А	најмногу 12000 ден.	8 %
обврзници тип В	најмалку 6000 ден.	12 %
вкупно	најмногу 30000 ден.	
ивестициите во обврзниците од тип В се поголеми или еднакви на инвестициите во обврзниците од тип А		

Одлучувачките променливи за овој проблем се x - инвестирани денари во обврзниците од тип А, и y - инвестирани денари во обврзниците од тип В.

Брачниот пар сака при инвестирањето да оствари највисока повратна заработка и затоа функцијата на целта која треба да се максимизира е $Z = 0.08x + 0.12y$. Имено, повратната заработка од инвестираните x денари во обврзниците од тип А е $8\% = 0.08$ од x, односно $0.08x$, и соодветно повратната заработка од инвестираните y денари во обврзниците од тип В е $12\% = 0.12$ од y, односно $0.12y$. Затоа вкупната повратна заработка е $0.08x + 0.12y$.

Ограничувањата на проблемот се формираат со помош на табелата на проблемот. Од тоа што инвестициите во обврзниците од тип А се најмногу 12000 денари го добиваме првото ограничување $x \leq 12000$, додека пак од тоа што инвестициите во обврзниците од тип В се најмалку 6000 денари го добиваме второто ограничување $y \geq 6000$. Брачниот пар располага со 30000 денари за инвестирање, па затоа третото ограничување е $x + y \leq 30000$. Тие исто така сакаат да инвестираат повеќе во обрзниците од тип В, отколку во обврзниците од тип А, па затоа четвртото ограничување е $y \geq x$. И секако, треба да ги додадеме и ограничувањата за ненегативност на променливите, односно $x \geq 0$ и $y \geq 0$ (инвестирани денари во обврзниците од тип А, односно од тип В). Тогаш, соодветниот систем ограничувачки неравенства е

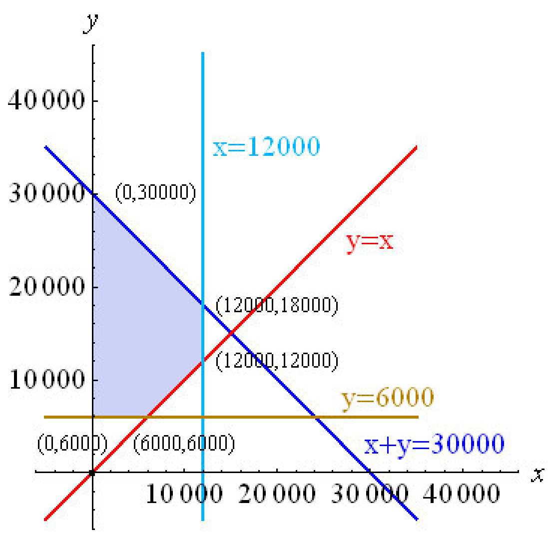
$$\begin{cases} x \leq 12000 \\ y \geq 6000 \\ x + y \leq 30000 \\ y \geq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

и задачата на линеарно програмирање придружена на овој проблем е

$$\max Z := 0.08x + 0.12y$$

$$\begin{cases} x \le 12000 \\ y \ge 6000 \\ x + y \le 30000 \\ y \ge x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Графичкиот приказ на допустливата област определена со системот ограничувачки неравенства е даден на Слика 15. Од таму се согледува дека темиња на допустливата област се точките $(0,6000)$, $(6000,6000)$, $(12000,12000)$, $(12000,18000)$, $(0,30000)$.



Слика 15

Соодветните вредности на функцијата на целта во темињата на допустливата област се дадени во табелата.
Од табелата се гледа дека максимум се достигнува во точката $(0,30000)$, односно брачниот пар за да може да оствари максимална повратна заработка од 3600 денари треба да ги инвестира сите 30000 денари во обрзниците од тип В.

теме (x, y)	вредност на функцијата на целта $z = 0.08x + 0.12y$
$(0,6000)$	$z = 0.08 \cdot 0 + 0.12 \cdot 6000 = 720$
$(6000,6000)$	$z = 0.08 \cdot 6000 + 0.12 \cdot 6000 = 480 + 720 = 1200$
$(12000,12000)$	$z = 0.08 \cdot 12000 + 0.12 \cdot 12000 = 960 + 1440 = 2400$
$(12000,18000)$	$z = 0.08 \cdot 12000 + 0.12 \cdot 18000 = 960 + 2160 = 3120$
$(0,30000)$	$z = 0.08 \cdot 0 + 0.12 \cdot 30000 = 3600$ ← max

Пример 16. Транспорт. Една фирма за продажба на автомобилски делови има еден магацин и две продавници А и В. Во магацинот се наоѓаат 1200 автомобилски гуми кои треба да се транспортираат до продавниците. Продавницата А има потреба од 400 гуми, и продавницата В има потреба од 500 гуми. Трошокот за транспорт на една гума од магацинот до продавницата А изнесува 12 ден., и трошокот за транспорт на една гума од магацинот до продавницата В изнесува 16 ден. Како треба да се организира транспортот на сите гуми од магацинот во продавнците и при тоа фирмата да оствари најниски трошоци?

Решение.

Овој проблем е пример за задачата на линеарно програмирање позната како **транспортна задача.** Основна карактеристика на овој тип на задача на линеарно програмирање е изедначување на понудата со побарувачката, односно во овој случај преносот на сите 1200 гуми од магацинот (понуда), во продавниците A и B (побарувачка). Најнапред ја составувавме соодветната табела на проблемот.

	основна побарувачка	транспорт
продавница A	400 гуми	12 ден.
продавница B	500 гуми	16 ден.
во магацинот има 1200 гуми		

Значи, треба да одредиме колку гуми треба да транспортираме во продавницата A, а колку во продавницата B, и при тоа да биде остварен минимален трошок. Па нека означиме со x - број на гуми кои треба да ги транспортираме во продавницата A, и y - број на гуми кои треба да ги транспортираме во продавницата B. Тогаш, изразот кој треба да го минимизираме (вкупниот трошок) е $Z = 12x + 16y$, затоа што за транспорт на секоја гума од магацинот до продавницата A се наплаќа по 12 ден., и за транспорт на секоја гума од магацинот до продавницата B се наплаќа по 16 ден.

Бидејќи основната побарувачка на продавницата A е 400 гуми, го имаме ограничувањето $x \geq 400$, и од тоа што основната побарувачка на продавницата B е 500 гуми, го имаме ограничувањето $y \geq 500$. И бидејќи треба да ги транспортираме сите гуми од магацинот, го добиваме ограничувањето $x + y = 1200$. Секако, да не ги изоставиме и ограничувањата за ненегативност на променливите $x \geq 0$ и $y \geq 0$ (број на гуми кои треба да се транспортираат од магацинот во продавниците A и B соодветно).

На овој начин ја добиваме следната задача на линеарно програмирање која одговара на дадениот транспортен проблем

$$\min Z := 12x + 16y$$

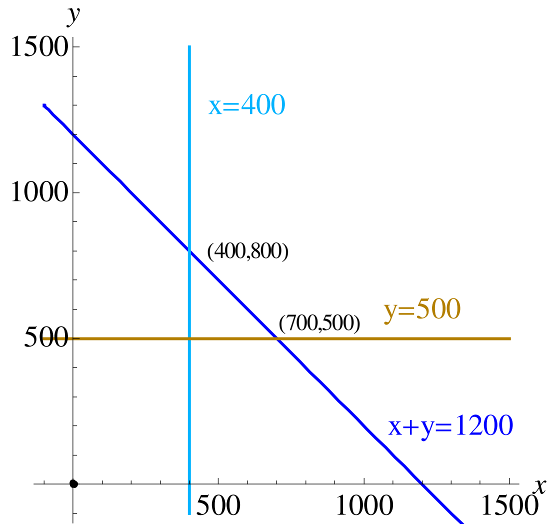
$$\begin{cases} x \geq 400 \\ y \geq 500 \\ x + y = 1200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Графичкиот приказ на допустливата област на овој проблем е даден со Слика 16 и претставува отсечка со крајни точки $(400, 800)$ и $(700, 500)$, заради ограничувачкото равенство $x + y = 1200$. Па, темиња на допустливата област се токму овие точки. Вредноста на функцијата на целта ово вие точки изнесува

$$z = 12 \cdot 400 + 16 \cdot 800 = 4800 + 12800 = 17600,$$

$$z = 12 \cdot 700 + 16 \cdot 500 = 8400 + 8000 = 16400,$$

соодветно, од каде се согледува дека минимумот се достигнува во точката $(700,500)$. Значи, за да транспотрниот трошок е минимален, треба да се транспортираат 700 гуми во продавницата А и 500 гуми во продавницата В, и при тоа транспортниот трошок ќе изнесува 16400 ден.



Слика 16

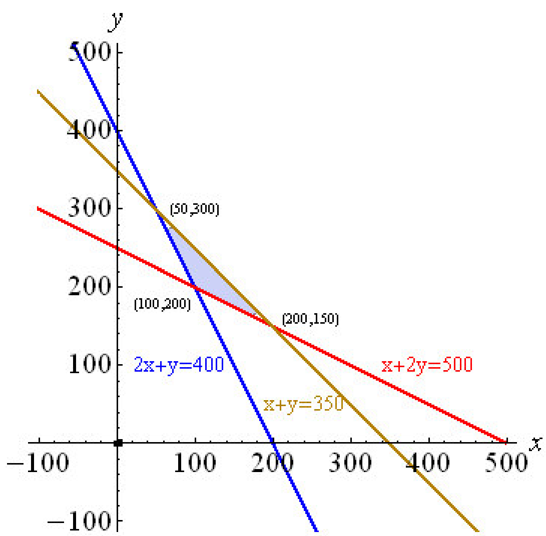
Пример 17. Прехрана. Една диета треба да содржи најмалку 400 едници витамини, 500 единици минерали и 1400 калории. Познато е дека една единица од типот на храна А содржи 2 единици витамини, 1 единица минерали и 4 калории, и една единица од типот на храна В содржи 1 единица витамини, 2 единици минерали и 4 калории. Исто така, познато е дека една единица од типот на храна А кошта 5 ден., и една единица од типот на храна В кошта 3 ден. Како треба да се состави диетата која ги задоволува минималните побарувања на витамини, минарали и калории, ако ги имаме на располагање само двата типа на прехрамбени продукти А и В, и при тоа да биде остварен минимален трошок?

Решение.

Соодветната табела на овој проблем на прехрана е следната.

	витамини	минерали	калории	цена
храна А	2	1	4	5 ден.
храна В	1	2	4	3 ден.
минимална побарувачка	400	500	1400	

Означуваме со x - единици од храната А и со y - единици од храната В кои треба да влезат во состав на диетата. Тогаш, вкупниот трошок изнесува $Z = 5x + 3y$ и тоа е функцијата на целта која треба да се минимизира. Ограничувањата се формираат од податоците за составот на храните А и В со витамини, минерали и калории, како и од податоците за минималната побарувачка од витамини, минерали и калории во состав на диетата. Така, бидејќи една единица од храната А содржи 2 единици витамини, и една единица од храната В содржи 1 единица витамини, тоа значи дека во состав на диетата ќе има вкупно $2x + y$ единици витамини. И бидејќи минималната побарувачка на витамини е 400 единици, го добиваме првото ограничување $2x + y \geq 400$. На сличен начин ги добиваме и другите две ограничувања кои се однесуваат на единиците минерали и на калориите соодветно, односно тоа се ограничувањата $x + 2y \geq 500$ и $4x + 4y \geq 1400$. Ги додаваме и ограничувањата за ненегативност на променливите $x \geq 0$ и $y \geq 0$ (единици од храните А и В соодветно во состав на диетата). Така, соодветната задача на линеарно програмирање која одговара на овој проблем е



Слика 17

$$\min Z := 5x + 3y$$

$$\begin{cases} 2x + y \geq 400 \\ x + 2y \geq 500 \\ 4x + 4y \geq 1400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

односно задачата

$$\min Z := 5x + 3y$$

$$\begin{cases} 2x + y \geq 400 \\ x + 2y \geq 500 \\ x + y \geq 350 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Графичкиот приказ на допустливата област е даден на Слика 17, од каде согледуваме дека темиња на допустливата област се точките $(100,200)$, $(200,150)$ и $(50,300)$. Вредностите на функцијата на целта во овие точки изнесува

$$z = 5 \cdot 100 + 3 \cdot 200 = 500 + 600 = 1100,$$
$$z = 5 \cdot 200 + 3 \cdot 150 = 1000 + 450 = 1450,$$
$$z = 5 \cdot 50 + 3 \cdot 300 = 250 + 900 = 1150,$$

соодветно. Па, заклучуваме дека најмал трошок при сосатвување на диетата која ги задоволува минималните побарувања од витамини, минерали и калории, ќе оствариме доколку земеме 100 единици од храната A и 200 единици од храната B. Тогаш, минималниот трошок ќе изнесува 1100 ден.

Понатаму, ви предлагаме да ги решите следните реални проблеми кои се сведуваат на задача на линеарно програмирање.

Задача 6. Една фабрика произведува два производа P1 и P2, при што секој од нив се изработува со користење на трите машини M1, M2 и M3. Машината M1 може да се користи најмногу 70 часа, машината M2 најмногу 40 часа и машината M3 најмногу 90 часа. За производство на едно парче од производот P1 потребни се 2 часа работа на машината M1, 1 час работа на машината M2 и 1 час работа на машината M3. За производство на едно парче од производот P2 потребни се 1 час работа на машината M1, 1 час работа на машината M2 и 3 часа работа на машината M3. Заработката од едно парче од производот P1 е 40 ден., додека заработката од едно парче од производот P2 е 60 ден. Под претпоставка дека секое произведено парче од производите P1 и P2 ќе се продаде, како треба да се организира производството за да биде остварена максимална вкупна заработка?

Задача 7. Еден човек одлучува да инвестира 45000 ден. во акциите на две високо котирачки фирми A и B. При тоа, цената на една акција од фирмата A изнесува 14 ден., а цената на една акција од фирмата B изнесува 30 ден. Фиксната повратна заработка при инвестирањето изнесува 8% за фирмата A и

6% за фирмата B. Човекот одлучува да инвестира најмалку по 25% од 45000 ден. во акциите на секоја од фирмите A и B, но исто така тој одлучил да инвестира и најмногу по 63% од 45000 ден. во акциите на секоја од фирмите A и B. На кој начин треба човекот да го реализира инвестирањето за да оствари најголема повратна заработка? Колку изнесува повратната заработка при тој оптимален план на инвестирање?

Задача 8. Едно пакување од бебешката каша од банана кошта 90 ден. и содржи 140 калории, 31 грам јагленохидтрати и 0% од препорачаната дневна доза на витамин C. Едно пакување од бебешкиот сок од моркови кошта 80 ден. и содржи 60 калории, 13 грама јагленохидтрати и 100% од препорачаната дневна доза на витамин C. Состави ја диетата (начинот на исхрана) на детето, користејќи ги само овие два вида на прехрамбени продукти, за да биде задоволена минималната побарувачка од 160 калории, 40 грама јагленохидрати и 70% од препорачаната дневна доза на витамин C, и при тоа да се оствари најмал трошок. Дозволено е да се корисатат делови од пакувањата од прехрамбените продукти.

Литература.

[1] G. B. Dantzig, *Linear programming and extensions*, A report prepared for US Air Force Project RAND, August 1963, Santa Monica, California, USA

[1] L. Neralić, *Uvod u matematičko programiranje 1*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003

[2] M. Sullivan, A. Mizrahi, *Mathematics: An Applied Approach*, Eight Edition, Chicago State University, Indiana University, 2005