Пример на СП задача.
Моделирање на СП задачи

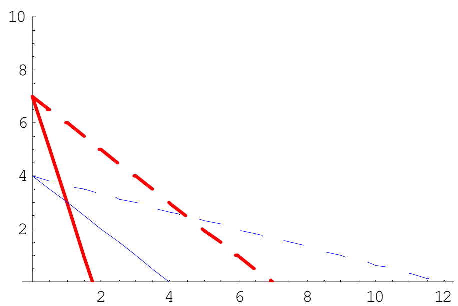
Пример.

Нека е дадена СП задачата

$$\min\{x_1 + x_2\}$$
$$w_1 x_1 + x_2 \geq 7$$
$$w_2 x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

каде $w_1 \sim U(1,4)$ и $w_2 \sim U(1/3,1)$ се случајни променливи.

Решение. Не постои единствен начин на решавање. Решението се сведува на анализа и дискусија.



На цртежот е претставена областа на ограничувањата како се менува во зависност од кои вредности ги примаат случајните променливи w_1 и w_2.

Испрекинатите линии се кога w_1 и w_2 ги примаат најмалите можни вредности 1 и 1/3 соодветно, а полните линии се кога ги примаат вредностите 4 и 1 соодветно.

Еден начин на решавање, познат како "**wait-and-see**" пристап, е по набљудување на случајниот вектор $w = (w_1, w_2)$ и одредување на негова реализација $\overline{w} = (\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ да се реши детерминистичката задача

$$\min\{x_1 + x_2\}$$
$$\overline{w}_1 x_1 + x_2 \geq 7$$
$$\overline{w}_2 x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

како ЛП задача (задача на линеарно програмирање). Но, генерално ова не е начин на решавање на СП задачи. Многу често е неизводлив. Треба да се добијат вредности за $x = (x_1, x_2)$ пред да се знаат вредноцтите на $w = (w_1, w_2)$.

Треба да се одлучи, што да се прави со незнаењето на вредностите на $w = (w_1, w_2)$. Три пристапа:

1) погодување на случаен начин
2) веројатносни ограничувања
3) "here-and-now"

1) Со **погодување** на вредностите на $w = (w_1, w_2)$, најчесто се решаваат СП задачите. Сепак треба да се внимава да се изберат разумни вредности. Следуваат трите основни начини за избор на вредностите.

- непристрасност - w_1 и w_2 се заменуваат со нивните математички очекувања

Бидејќи $E(w_1)=5/2$ и $E(w_2)=2/3$ се решава задачата

$$\min\{x_1+x_2\}$$
$$\frac{5}{2}x_1+x_2\geq 7$$
$$\frac{2}{3}x_1+x_2\geq 4$$
$$x_1,x_2\geq 0$$

која има оптимално решение $x^*=(18/11,32/11)$ и оптимална вредност на функцијата на целта $f^*=50/11\approx 5.545$.

- најлош случај - се избираат најмалите можни вредности за w_1 и w_2

Во овој случај се решава задачата

$$\min\{x_1+x_2\}$$
$$x_1+x_2\geq 7$$
$$\frac{1}{3}x_1+x_2\geq 4$$
$$x_1,x_2\geq 0$$

која има оптимално решение $x^*=(0,7)$ и оптимална вредност на функцијата на целта $f^*=7$.

- најдобар случај - се избираат најголемите вредности за w_1 и w_2

Во овој случај се решава задачата

$$\min\{x_1+x_2\}$$
$$4x_1+x_2\geq 7$$
$$x_1+x_2\geq 4$$
$$x_1,x_2\geq 0$$

која има оптимално решение $x^*=(4,0)$ и оптимална вредност на функцијата на целта $f^*=4$.

2) Пристапот со **веројатносни ограничувања** е многу поразумен. Имено се додаваат ограничувањата

$$P\{w_1x_1+x_2\geq 7\}\geq \alpha_1$$
$$P\{w_2x_1+x_2\geq 4\}\geq \alpha_2$$

или можеби ограничувањето

$$P\{w_1x_1+x_2\geq 7, w_2x_1+x_2\geq 4\}\geq \alpha,$$

каде $\alpha_1,\alpha_2,\alpha\in[0,1]$. Ако $\alpha_1,\alpha_2=1$, односно ако $\alpha=1$, тогаш новодобиената задача е детерминистичка (зошто?).
Изменетата задача со првите две ограничувања со следните трансформации

$$P\{w_1x_1 + x_2 \ge 7\} \ge \alpha_1 \qquad P\{w_2x_1 + x_2 \ge 4\} \ge \alpha_2$$

$$P\{w_1 \ge \tfrac{7-x_2}{x_1}\} \ge \alpha_1 \qquad P\{w_2 \ge \tfrac{4-x_2}{x_1}\} \ge \alpha_2$$

$$1 - P\{w_1 < \tfrac{7-x_2}{x_1}\} \ge \alpha_1 \qquad 1 - P\{w_2 < \tfrac{4-x_2}{x_1}\} \ge \alpha_2$$

$$P\{w_1 < \tfrac{7-x_2}{x_1}\} \le 1 - \alpha_1 \qquad P\{w_2 < \tfrac{4-x_2}{x_1}\} \le 1 - \alpha_2$$

$$F_{w_1}(\tfrac{7-x_2}{x_1}) \le 1 - \alpha_1 \qquad F_{w_2}(\tfrac{4-x_2}{x_1}) \le 1 - \alpha_2$$

каде $F_{w_1}(x) = \frac{x-1}{3}$, $x \in (1,4)$ и $F_{w_2}(x) = \frac{3x-1}{2}$, $x \in (1/3,1)$ се функциите на распределба на w_1 и w_2 соодветно, преминува во задача на параметарско програмирање со параметри $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, т.е.

$$\begin{array}{lcl} \min\{x_1 + x_2\} & & \min\{x_1 + x_2\} \\ P\{w_1x_1 + x_2 \ge 7\} \ge \alpha_1 & & (4 - 3\alpha_1)x_1 + x_2 \ge 7 \\ P\{w_2x_1 + x_2 \ge 4\} \ge \alpha_2 & \Leftrightarrow & (3 - 2\alpha_2)x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 & & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

3) Најчесто потребно е да се донесе одлука (да се реши задачата по x) без да се има потполна информација за случајните настани. Овој пристап е познат како "**here-and-now**", кога се применува корегирачкиот (случаен) вектор y и при тоа се добива следната задача.

$$\min\{x_1 + x_2 + Q(x_1, x_2)\}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

каде $Q(x_1, x_2) = E_w[Q(x_1, x_2, w)]$ и

$$Q(x_1, x_2, w) = \min\{q_1 y_1 + q_2 y_2\}$$
$$w_1x_1 + x_2 + y_1 \ge 7$$
$$w_2x_1 + x_2 + y_2 \ge 4$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

каде q_1, q_2 се тежински коефициенти доделени на секое од ограничувањата со случајни променливи или *цени на помошта* (recourse costs). Функцијата $Q(x_1, x_2)$ е позната како *помошна функција* (recourse function), а новодобиената задача е позната како *задача во две етапи со помошна функција* (two-stage recourse problem).

Нека случајниот вектор w има конечен број на реализации $w^1, w^2, ..., w^S$ наречени *сценарија* и ако секоја реализација се остварува со веројатност $p_s = P(w = w^s)$, $s = 1, 2, ..., S$, тогаш развиената форма на горната задача со тежински коефициенти $q_1 = q_2 = \lambda$ е следната.

$$\min\{x_1 + x_2 + \sum_{s=1}^{S} p_s \lambda(y_{1s} + y_{2s})\}$$

$$w_{1s}x_1 + x_2 + y_{1s} \geq 7 \quad s = 1,2,...,S$$

$$w_{2s}x_1 + x_2 + y_{2s} \geq 4 \quad s = 1,2,...,S$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$y_{1s}, y_{2s} \geq 0 \quad s = 1,2,...,S$$

Вака добиената задача е детерминистичка ЛП-задача.

Задача на фармерот (симплифицирана верзија).

Еден фармер може да засади на својата земја некое од следните растенија, пченка, пченица или грав. Претпоставуваме дека престојната сезона ќе биде или врнежлива или сушна, ништо помеѓу. Ако сезоната е врнежлива, пченката е најпрофитабилна. Ако сезоната е сушна, пченицата е најпрофитабилна. Нека профитот е даден со следната табела.

	само пченка	само пченица	само грав
врнежлива сезона	100	70	80
сушна сезона	-10	40	35

Одреди како треба фармерот да го испланира засадувањето на растенијата за да очекува да оствари најголем профит.

Решение.

Нека веројатноста за врнежлива сезона е p, тогаш веројатноста да се реализира сушна сезона е $1-p$. Така, очекуваниот профит при засадување на различно растение е

- за пченка: $100p + (-10)\cdot(1-p) = -10 + 110p$
- за пченица: $70p + 40\cdot(1-p) = 40 + 30p$
- за грав: $80p + 35\cdot(1-p) = 35 + 45p$

Да означиме со x_1, x_2, x_3 делот од фармата кој фармерот треба да го засади со пченка, пченица, грав соодветно. Значи, ги имаме ограничувањата $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ и $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1$. Со овие ознаки очекуваниот профит е

$$P = x_1(-10+110p) + x_2(40+30p) + x_3(35+45p),$$

па СП задачата која треба да се реши е

$$\max\{x_1(-10+110p) + x_2(40+30p) + x_3(35+45p)\}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1$$

каде p е случајна променлива која ги прима вредностите 0 и 1 со еднаква веројатност од 0.5.

Ако земеме $p = 0.5$ (забележете дека $E(p) = 0.5$), природно е да се очекува да најголем профит се оствари кога половина од земјата се засади со пченка (која е најпрофитабилна при врнежлива сезона) и половина од земјата се засади со пченица (која е најпрофитабилна при сушна сезона), односно кога $x_1 = 1/2, x_2 = 1/2, x_3 = 0$. Тогаш, очекуваниот профит е

$$0.5(-10+110\cdot 0.5) + 0.5(40+30\cdot 0.5) = 50.$$

Но, решението на СП задачата според Е-моделот (кога за реализација на случајната променлива p се зима нејзиното математичко очекување)

$$\max\{x_1(-10+110\cdot 0.5)+x_2(40+30\cdot 0.5)+x_3(35+45\cdot 0.5)\}$$
$$x_1+x_2+x_3=1$$
$$0\le x_1,x_2,x_3\le 1$$

т.е.

$$\max\{45x_1+55x_2+57.5x_3\}$$
$$x_1+x_2+x_3=1$$
$$0\le x_1,x_2,x_3\le 1$$

е $x^*=(0,0,1)$ со оптимален профит $P^*=57.5$ (односно максимален профит се постигнува кога фармерот ќе засади само грав на целата фарма). Ова значи дека очекуваниот оптимален профит според Е-моделот е 15% подобар од истиот при разумно резонирање при решавањето на СП задачата. Но, решавањето на СП задачата со заменување на случајните променливи со нивните математички очекувања не е идеалниот начин на решавање (во општ случај може и да не е оптимално добиеното решение).

Задача на фармерот (поопшта верзија).

Еден фармер може да одгледува на својата земја од 500 ара пченица, пченка или грав. Нему му се потребни најмалку 200 тона пченица и 240 тона пченка годишно за прехрана на добитокот. Овие количини на пченица, односно пченка тој може да ги произведе на звојата земја или да ги купи. Доколку произведе повеќе отколку што му треба за прехрана на добитокот, тој може да го продаде вишокот по цена од 170$, односно 150$ за тон од пченица и пченка соодветно. Куповните цени за еден тон пченица, односно пченка се 238$ и 210$ соодветно. На својата земја фармерот може да одгледува и грав. Продажната цена на гравот е 36$ за тон за првите 6000 тона и по цена од 10$ за секој тон грав над поставената економска квота од 6000 тона. Врз база на досегашното искуство, фармерот знае дека просечниот принос на неговата земја е 2.5, 3 и 20 тона на еден ар за пченица, пченка и грав соодветно. Исто така, трошоците за засадување на растенијата се 150$, 230$ и 260$ за еден ар засаден со пченица, пченка и грав соодветно. Сумирани дадените податоци во табела се следните.

	пченица	пченка	грав
принос (Т / ар)	2.5	3	20
трошоци за садење ($ / ар)	150	230	260
продажна цена ($ / Т)	170	150	36 (<= 6000 Т) 10 (> 6000 Т)
набавна цена ($ / Т)	238	210	-
минимална побарувачка (Т)	200	240	-

Одреди како треба фармерот да го испланира засадувањето на растенијата за да очекува да оствари најголем профит.

Решение.

а) Поставување на задачата

Вака како што е зададена задачата на фармерот (со користење на познавањето на просечниот принос за секое растение поединечно) таа може да се измоделира во ЛП задача. Имено, со воведување на променливите

x_1 - ари земја насадена со пченица,

x_2 - ари земја насадена со пченка,

x_3 - ари земја насадена со грав,

w_1 - тони пченица која ќе ја продаде,

w_2 - тони пченка која ќе ја продаде,

w_3 - тони грав кој ќе го продаде по повисоката цена,

w_4 - тони грав кој ќе го продаде по пониската цена,

y_1 - тони пченица која ја набавува,

y_2 - тони пченка која ја набавува,

се добива следната ЛП задача.

$$\min\{150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4\}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 500$$
$$2.5x_1 + y_1 - w_1 \ge 200$$
$$3x_2 + y_2 - w_2 \ge 240$$
$$20x_3 - w_3 - w_4 \ge 0$$
$$w_3 \le 6000$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0$$

чие оптимално решение е $(x^*, y^*, w^*) = (120, 80, 300, 0, 0, 100, 0, 6000, 0)$ или за појасно дадено е со следната табела.

оптимално решение при просечен принос			
	пченица	пченка	грав
површина (ари)	120	80	300
производство (Т)	300	240	6000
продажба (Т)	100	0	6000
набавка (Т)	0	0	-
остварен профит: 118600$			

Да забележиме дека барањето на максимален профит е еквивалентно со барањето на минимален расход, како што е направено при ова моделирање на задачата. Производството е пресметано со знаење на просечниот принос (2.5, 3 и 20 тона на еден ар за пченица, пченка и грав соодветно) и оптималната површина која се засадува со соодветното растение (120, 80 и 300 ари пченица, пченка и грав соодветно), односно $120 \cdot 2.4 = 300$, $80 \cdot 3 = 240$ и $300 \cdot 20 = 6000$ тони пченица, пченка и грав соодветно е оптималното производство во овој случај. Додека, остварениот профит е спротивна вредност од оптималната вредност на функцијата на целта, односно

$$-(150x_1^* + 230x_2^* + 260x_3^* + 238y_1^* - 170w_1^* + 210y_2^* - 150w_2^* - 36w_3^* - 10w_4^*) =$$
$$= -(150\cdot 120 + 230\cdot 80 + 260\cdot 300 + 238\cdot 0 - 170\cdot 100 + 210\cdot 0 - 150\cdot 0 - 36\cdot 6000 - 10\cdot 0) = 118600$$

б) Вметнување случајност во задачата

Но, фармерот е свесен дека секоја година не може да се очекува дека просечниот принос ќе се реализира. Имено, приносот зависи од временските услови, некои растенија бараат повеќе врнежи, а некои посушно време, па промените во приносот од 20 до 25% над или под просечниот не се невообичаени. Затоа, би требало да се испитаат уште два случаја, да се реши задача на фармерот за уште две реализации на приносот, едната 20% под просечниот принос, а другата 20% над просечниот принос. Ова значи дека задачата на фармерот би требало да се измоделира како СП задача,

$$\min\{150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4\}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_3 \le 500 \\
& \xi_1 x_1 + y_1 - w_1 \ge 200 \\
& \xi_2 x_2 + y_2 - w_2 \ge 240 \\
& \xi_3 x_3 - w_3 - w_4 \ge 0 \\
& w_3 \le 6000 \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0
\end{aligned}$$

каде $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ е случаен вектор чии компоненти се приносите изразени во тона на еден ар за пченица, пченка и грав соодветно. Последното решение на оваа задача беше со Е-моделот, односно кога ξ_1, ξ_2, ξ_3 се заменија со нивните математички очекувања $E(\xi_1) = 2.5, E(\xi_2) = 3, E(\xi_3) = 20$ соодветно.

в) Решавање на СП задачата според "wait-and-see" пристапот

Така кога за ξ_1, ξ_2, ξ_3 ќе се земат реализациите што претставуваат 20% над просечниот принос, односно 3, 3.6, 24 соодветно се добива следниот детерминистички еквивалент на горната СП задача

$$\min\{150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4\}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_2 + x_3 \le 500 \\
& 3x_1 + y_1 - w_1 \ge 200 \\
& 3.6x_2 + y_2 - w_2 \ge 240 \\
& 24x_3 - w_3 - w_4 \ge 0 \\
& w_3 \le 6000 \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0
\end{aligned}$$

чие оптимално решение е $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}) = (183.333, 66.6667, 250, 0, 0, 350, 0, 6000, 0)$, односно дадено со следната табела.

оптимално решение при принос од 20% над просечниот			
	пченица	пченка	грав
површина (ари)	183.333	66.6667	250
производство (Т)	550	240	6000
продажба (Т)	350	0	6000
набавка (Т)	0	0	-
остварен профит: 167667$			

Кога пак за ξ_1, ξ_2, ξ_3 ќе се земат реализациите што претставуваат 20% под просечниот принос, односно 2, 2.4, 16 соодветно се добива следниот детерминистички еквивалент на горната СП задача

$$\min\{150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4\}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

$$2x_1 + y_1 - w_1 \geq 200$$

$$2.4x_2 + y_2 - w_2 \geq 240$$

$$16x_3 - w_3 - w_4 \geq 0$$

$$w_3 \leq 6000$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

чие оптимално решение е $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{w}) = (100, 25, 375, 0, 180, 0, 0, 6000, 0)$, односно дадено со следната табела.

оптимално решение при принос од 20% под просечниот			
	пченица	пченка	грав
површина (ари)	100	25	375
производство (Т)	200	60	6000
продажба (Т)	0	0	6000
набавка (Т)	0	180	-
остварен профит: 59950$			

Да ги резимираме добиените "wait-and-see" решенија, односно добиените оптимални решенија знаејќи ги реализациите на случајниот вектор ξ на приносот.

принос	20% под просечен	просечен	20% над просечен
пченица (Т)	100	120	183.333
пченка (Т)	25	80	66.6667
грав (Т)	375	300	250
профит ($)	59950	118600	167667

г) Решавање на СП задачата според "here-and-now" пристапот

Да претпоставиме дека секоја од трите реализации на приносот ξ се реализира со еднаква веројатност 1/3. Да ги индексираме со индексот $s = 1, 2, 3$ реализациите што го претставуваат приносот 20% над просечниот, просечниот и 20% под просечниот соодветно. На тој начин се формираат нови променливи за тони набавка и тони продажба за секоја од реализациите на приносот или $y_{is}, w_{js}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4, s = 1, 2, 3$. Така, w_{32} означува колку тони грав ќе се продаде по повисока цена кога приносот е просечен. Тогаш, проширената форма на соодветната СП задача е следната.

$$\min\{150x_1 + 230x_2 + 260x_3 +$$
$$+\tfrac{1}{3}(238y_{11} - 170w_{11} + 210y_{21} - 150w_{21} - 36w_{31} - 10w_{41}) +$$
$$+\tfrac{1}{3}(238y_{12} - 170w_{12} + 210y_{22} - 150w_{22} - 36w_{32} - 10w_{42}) +$$
$$+\tfrac{1}{3}(238y_{13} - 170w_{13} + 210y_{23} - 150w_{23} - 36w_{33} - 10w_{43})\}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 500$$
$$3x_1 + y_{11} - w_{11} \ge 200$$
$$3.6x_2 + y_{21} - w_{21} \ge 240$$
$$24x_3 - w_{31} - w_{41} \ge 0$$
$$2.5x_1 + y_{12} - w_{12} \ge 200$$
$$3x_2 + y_{22} - w_{22} \ge 240$$
$$20x_3 - w_{32} - w_{42} \ge 0$$
$$2x_1 + y_{13} - w_{13} \ge 200$$
$$2.4x_2 + y_{23} - w_{23} \ge 240$$
$$16x_3 - w_{33} - w_{43} \ge 0$$
$$w_{31}, w_{32}, w_{33} \le 6000$$
$$x_1, x_2, x_3, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, w_{4s} \ge 0, s = 1,2,3$$

Нејзиното оптимално решение е дадено во табелата што следува. Во првата редица се дадени површините за засадување, кои треба да се одредат пред да е позната било каква реализација на приносот, и тие вредности ја формираат *првата етапа*. Во останатите редици од табелата дадени се производството, продажбата и набавката при секоја реализација на приносот, и тие вредности ја формираат *втората етапа*. На дното од табелата прикажан е очекуваниот профит.

		пченица	пченка	грав
s	површина (ари)	170	80	250
1	производство (Т)	510	288	6000
1	продажба (Т)	310	48	6000
1	набавка (Т)	0	0	-
2	производство (Т)	425	240	5000
2	продажба (Т)	225	0	5000
2	набавка (Т)	0	0	-
3	производство (Т)	340	192	4000
3	продажба (Т)	140	0	4000
3	набавка (Т)	0	48	-
(очекуван) профит: 108390$				

Да се потсетиме дека овој пристап на решавање на СП задачата е познат како "here-and-now". Во овој пример на задача на фармерот во улога на корегирачки вектор се набавките и продажбата. Па последната проширена форма на СП задачата може да се запише во облик на задача во две етапи со помошна функција (two-stage recourse problem) на следниот начин.

$$\min\{150x_1+230x_2+260x_3+Q(x_1,x_2,x_3)\}$$
$$x_1+x_2+x_3\le 500$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 0$$

каде $Q(x_1,x_2,x_3)=E_\xi[Q(x_1,x_2,x_3,\xi)]$ и

$$Q(x_1,x_2,x_3,\xi)=\min\{238y_1-170w_1+210y_2-150w_2-36w_3-10w_4\}$$
$$\xi_1x_1+y_1-w_1\ge 200$$
$$\xi_2x_2+y_2-w_2\ge 240$$
$$\xi_3x_3-w_3-w_4\ge 0$$
$$w_3\le 6000$$
$$y_1,y_2,w_1,w_2,w_3,w_4\ge 0$$

каде ξ е случаен вектор кој ги прима со еднаква веројатност од 1/3 секоја од неговите три реализации $(3,3.6,24)$, $(2.5,3,20)$ и $(2,2.4,16)$.

д) Анализа на добиеното решение

Остварените оптимални профити при принос од 20% над просечниот, просечен и 20% под просечниот (остварени профити во случај на *перфектна информација*, знаење која реализација на случајниот вектор ξ на приносот ќе се остварува) се 167667$, 118600$ и 59950$ соодветно. Па, под претпоставка дека секоја од трите реализации $(3,3.6,24)$, $(2.5,3,20)$ и $(2,2.4,16)$ на случајниот вектор ξ на приносот се остварува со еднаква веројатност од 1/3, заклучуваме дека просечниот профит на подолг временски период (long run average profit) ќе биде $\frac{1}{3}\cdot 167667+\frac{1}{3}\cdot 118600+\frac{1}{3}\cdot 59950=115406\$$. Од друга страна оптималниот профит добиен со "here-and-now" пристапот, без знаење на перфектната информација е 108390$.

Разликата $115406-108390=7016\$$ е *очекуваната вредност на перфектната информација* (expected value of perfect information - EVPI), која покажува колку "вреди" знаењето на перфектната информација, колку "вреди" да се инвестира во технологијата која би дала некое предвидување за реализација на случајниот вектор ξ на приносот.

Која е пак вредноста на вметнување случајност во задачата? За одредување на оваа вредност треба најнапред да се реши задачата според Е-моделот за да се одредат вредностите x од првата етапа (оваа задача е веќе решена, добиени се оптималните Е-решенија $x_1=120$, $x_2=80$, $x_3=300$). Потоа се фиксираат оптималните вредности на x од првата етапа и се решаваат сите "wait-and-see" задачи кои одговараат на сите реализации. Тогаш, разликата меѓу оптималниот профит добиен со "here-and-now" пристапот и очекуваната оптимална вредност на функцијата на целта од добиените оптимални вредности на функцијата на целта според "wait-and-see" пристапот, е бараната вредност на вметнување на случајност во задачата или *вредноста на стохастичкото решение* (value of the stochastic solution - VSS).

Ја решаваме СП задачата според "wait-and-see" пристапот при принос од 20% над просечниот и фиксирани оптимални вредности на x од првата етапа добиени со Е-моделот т.е. $x_1 = 120$, $x_2 = 80$, $x_3 = 300$.

$$\min\{150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4\}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 = 120 \\
& x_2 = 80 \\
& x_3 = 300 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 500 \\
& 3x_1 + y_1 - w_1 \ge 200 \\
& 3.6x_2 + y_2 - w_2 \ge 240 \\
& 24x_3 - w_3 - w_4 \ge 0 \\
& w_3 \le 6000 \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0
\end{aligned}$$

Нејзиното оптимално решение е $(x, y, w) = (120, 80, 300, 0, 0, 160, 48, 6000, 1200)$, што значи дека остварениот профит е 148000$.

Кога приносот е 20% под просечниот и при фиксирани оптимални вредности на x од првата етапа добиени со Е-моделот т.е. $x_1 = 120$, $x_2 = 80$, $x_3 = 300$, се добива следниот детерминистички еквивалент на СП задачата.

$$\min\{150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4\}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 = 120 \\
& x_2 = 80 \\
& x_3 = 300 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 500 \\
& 2x_1 + y_1 - w_1 \ge 200 \\
& 2.4x_2 + y_2 - w_2 \ge 240 \\
& 16x_3 - w_3 - w_4 \ge 0 \\
& w_3 \le 6000 \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0
\end{aligned}$$

Нејзиното оптимално решение е $(x, y, w) = (120, 80, 300, 0, 48, 40, 0, 4800, 0)$, што значи дека остварениот профит е 55120$.

Кога приносот е просечниот, оптималното решение се совпаѓа со истото добиено со Е-моделот, односно тогаш остварениот профит е 118600$.

Значи, ако фармерот ја засади својата земја според оптималното решение од Е-моделот (одлука донесена врз база на просечен принос), односно $x_1 = 120$, $x_2 = 80$, $x_3 = 300$, тој би очекувал да оствари просечен профит на подолг временски период од $\frac{1}{3} \cdot 148000 + \frac{1}{3} \cdot 118600 + \frac{1}{3} \cdot 55120 = 107240\$$. Од друга страна оптималниот профит добиен со "here-and-now" пристапот (кога фармерот ја засадува својата земја според оптималното решение $x_1 = 170, x_2 = 80, x_3 = 250$), со решавање на СП задачата во две етапи со помошна функција е 108390$.

Разликата $180390 - 107240 = 1150\$$ е *вредноста на стохастичкото решение* (value of the stochastic solution - VSS), која покажува дека фармерот ќе биде во добивка од 1150$ по сезона, доколку ја засади својата земја според оптималното "стохастичко" решение (добиено со "here-and-now" пристапот), отколку според оптималното решение добиено со Е-моделот.

ѓ) Задача за понатамошно истражување

Формулирај го моделот на СП задачата кога цените (набавните и продажните) на пченицата и пченката се 10% пониски при принос над просечниот и 10% повисоки при принос под просечниот. Претпоставуваме дека цените на гравот не се менуваат во зависност од приносот.

Задача на фармерот (симплифицирана верзија) - продолжение.

Во овој случај СП задачата беше формулирана на следниот начин

$$\max\{x_1(-10+110p) + x_2(40+30p) + x_3(35+45p)\}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1$$

каде p е случајна променлива која ја претставува веројатноста за врнежлива сезона и според условот на задачата сезоната е или врнежлива или сушна, ништо помеѓу, тогаш p ги прима вредностите 0 и 1 со еднаква веројатност од 0.5, додека x_1, x_2, x_3 се деловите од фармата кој фармерот треба да ги засади со пченка, пченица и грав соодветно.

Со "wait-and-see" пристапот решаваме два детерминистички еквивалента на оваа СП задача. Имено, ако се знае дека сезоната е врнежлива, тогаш $p = 1$, па ја решаваме задачата

$$\max\{100x_1 + 70x_2 + 80x_3\}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1$$

чие оптимално решение е $(1,0,0)$ со оптимален профит од 100$. Ако се знае дека сезоната е сушна, тогаш $p = 0$, па ја решаваме задачата

$$\max\{-10x_1 + 40x_2 + 35x_3\}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1$$

чие оптимално решение е $(0,1,0)$ со оптимален профит од 40$. Што значи дека на подолг временски период фармерот треба да очекува да оствари профит од $0.5 \cdot 100 + 0.5 \cdot 40 = 70\$$.

Решавањето на СП задачата според "here-and-now" пристапот се поклопува со решавањето според Е-моделот (веќе е направено тоа погоре во текстот) и добиено е оптимално решение $(0,0,1)$ со оптимален профит од 57.5$. Ова последно решение се зема за стохастичко решение.

Така, во овој случај EVPI изнесува $70-57.5=12.5\$$. Колку изнесува VSS во овој случај? (за врската меѓу EVPI и VSS, види Chapter 4 од J. R. Birge, F. Louveaux – Introduction to Stochastic Programming)

Прилог. (решенија на некои од добиените детерминистички еквиваленти на соодветните СП задачи во Mathematica)

```
(* min{c.x} subject to m.x ≥ b and x≥0 *)
(* LinearProgramming[c,m,b] *)

x=LinearProgramming[{1,1},{{5/2,1},{2/3,1}},{7,4}]
```
$\left\{\frac{18}{11}, \frac{32}{11}\right\}$

```
x=LinearProgramming[{1,1},{{1,1},{1/3,1}},{7,4}]
 {0,7}

x=LinearProgramming[{1,1},{{4,1},{1,1}},{7,4}]
 {4,0}

(* x3=1-x1-x2 *)
x=LinearProgramming[{-45+57.5,-55+57.5},{{-1,0},{0,-1}},{-1,-1}]
 {0.,0.}
(* => x3=1 *)

(* x = (x1, x2, x3, y1, y2, w1, w2, w3, w4) *)
x=LinearProgramming[{150,230,260,238,210,-170,-150,-36,-10},
{{-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0},{2.5,0,0,1,0,-1,0,0,0},
{0,3,0,0,1,0,-1,0,0},{0,0,20,0,0,0,0,-1,-1},
{0,0,0,0,0,0,0,-1,0}},{-500,200,240,0,-6000}]
{120.,80.,300.,0.,0.,100.,0.,6000.,0.}
{150,230,260,238,210,-170,-150,-36,-10}.x
-118600.

(* y = (y1, y2, w1, w2, w3, w4), x1 = 120, x2 = 80, x3 = 300 *)
y=LinearProgramming[{238,210,-170,-150,-36,-10},
{{1,0,-1,0,0,0},{0,1,0,-1,0,0},{0,0,0,0,-1,-1},{0,0,0,0,-1,0}},
{200-3*120,240-3.6*80,0-24*300,-6000}]
{0.,0.,160.,48.,6000.,1200.}
{150,230,260}.{120,80,300}+{238,210,-170,-150,-36,-10}.y
-148000.
```