Програмирање - вежби

1. Околина на програмирање во VB. Мини VB-проекти

Задача 1. Пресметај ја вредноста на изразот $A=\dfrac{a(b-3)^2+a^3-2b}{(a-b)^2-2a}$.

Задача 2. Погоди замислен број од 1 до 1000. (компјутерот „замислува“ број од 1 до 1000, корисникот на програмата треба да го погоди со внесување на своите погодувања)

2. Алгоритми

Задача 3. Состави алгоритам за генерирање на сите прости броеви од 1 до 200.

Задача 4. Состави алгоритам за наоѓање на средната вредност од најмалиот и најголемиот број од дадени n броеви.

Задача 5. Состави алгоритам за сортирање на n елементи по големина (во неопаѓачки редослед) за секој од наведените методи.

а) SELECTION SORT. Во i-тиот чекор ($i=1,2,...,n$) на i-тото место се поставува најмалиот min од елементите $a(i),a(i+1),...,a(n)$, а елементот $a(i)$ се префрла на местото од елементот min.

б) MERGE SORT. Дадена низа $a(1),...,a(n)$ ја сортира на тој начин што ја дели на две половинки $a(1),...,a([n/2])$ и $a([n/2]+1),...,a(n)$, и ги сортира секоја од половинките рекурзивно. Потоа „спојува“ две помали сортирани низи во една поголема сортирана низа.

Пример.

```
                 6 3 5 2 4
делење
              6 3 5        4 2
делење
           6 3      5     4     2
делење
         6    3     5     4     2
спојување
           3 6      5     4     2
спојување
              3 5 6        2 4
спојување
                 2 3 4 5 6
```

в) QUICK SORT. Ги прераспределува елементите на низата $a(1),...,a(n)$ така што на i-тото место го става елементот p така што сите елементи пред p да се помали од вредноста на p т.е. $a(j) \le p$ за $j \le i-1$ и сите елементи после p да се поголеми од вредноста на p т.е. $a(j) \ge p$ за $j \ge i+1$ (p е пивот елемент, најчесто се зема првиот елемент од поднизата која ја сортираме).

г) BUBLE SORT. Во i-тиот чекор ($i=1,2,...,n$) се „истуркува" на ($n-i+1$)-вото место најголемиот од $a(1),...,a(n-i+1)$, со меѓусебно споредување на секој пар соседни елементи (првиот со вториот и помалиот се става понапред, па вториот со третиот и помалиот се става понапред, итн).

3. Основи на програмирањето во Visual Basic

Задача 6. Пресметај ја вредноста на y, ако

$$y = \begin{cases} x_1 + x_2 & , x_1 < x_2 \\ x_1 \cdot x_2 & , x_1 = x_2 \\ x_1 / x_2 & , x_1 > x_2, x_2 \ne 0 \end{cases}$$

Задача 7. Подреди ги по големина броевите a, b, c.

Задача 8. Пресметај n!.

Задача 9. Пресметај (2n+1)!!.

Задача 10. Пресметај m!!.

Задача 11. Реши ја равенката по x,

$$\frac{(x+a)^3}{a-1} = \frac{a^2-a-2}{a^2-1}$$

во зависност од дадена вредност на параметарот $a \in R$.
Тест: 1) $a=10 \Rightarrow x=-8$ 2) $a=-6 \Rightarrow x=4$

Задача 12. За дадени n позитивни реални броеви, пресметај ја нивната

1) аритметичка средина
2) геометриска средина
3) хармониска средина
4) квадратна стедина

во зависност од изборот на корисникот.
Забелешка.
1) $A_n = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ е аритметичка средина на $a_1, a_2, ..., a_n > 0$,
2) $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ е геометриска средина на $a_1, a_2, ..., a_n > 0$,

3) $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$ е хармониска средина на $a_1, a_2, ..., a_n > 0$,

4) $K_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}$ е квадратна средина на $a_1, a_2, ..., a_n > 0$.

Дополнување. Да му се дозволи на корисникот да за внесени n броеви избере пресметување на повеќе од една средина (без да ги внесува повторно броевите).

Задача 13. За дадени ненегативни цели броеви n и k, пресметај

1) $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $0 \le k \le n$

2) $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $0 \le k \le n$

3) $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$, $n \ge 1$, $k \ge 0$

4) $\overline{V}_n^k = n^k$

во зависност од изборот на корисникот.

Задача 14. Одреди го бројот на цифри на природниот број n.

Задача 15. Најди го обратниот број на природниот број n.
Дополнување. Провери дали внесен природен број n е палиндром или не.
(Палиндром е број кој е еднаков на неговиот обратен број.)

Задача 16. Провери дали внесен природен број n е прост или не.

Задача 17. Најди ги сите прости броеви до n.

Задача 18. Најди ги најголемиот заеднички делител (НЗД) и најмалиот заеднички содржател (НЗС) на природните броеви a и b.

а) „пешки"

б) со Евклидов алгоритам

Упатство. $\text{НЗД}(a,b)\cdot\text{НЗС}(a,b) = a\cdot b$, значи доволно е да се најде еден од НЗД(a,b) или НЗС(a,b).

Задача 19. Пресметај ја приближната вредност на π,

1) до k-тиот член

2) со точност $\varepsilon > 0$

со помош на развојот на функцијата

а) $\operatorname{arctg} x$ б) $\arcsin x$

Упатство.

а) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + ...$

$x = 1 \Rightarrow \pi = 4\cdot(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + ...)$

За барањето под 2), бидејќи редот е алтернативен, сумирањето оди до оној член кој по апсолутна вредност е помал или еднаков на точноста $\varepsilon > 0$.

б) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2}\cdot\frac{x^5}{5} + ... + \frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2k-1)}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + ...$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow\pi=6\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2^7\cdot 2\cdot 5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^{3k+1}\cdot k!\cdot(2k+1)}+\ldots)$$

За барањето под 2), сумирањето се изведува се додека остатокот по апсолутна вредност не стане помал од точноста $\varepsilon>0$. Бидејќи,

$$|R_k|=\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2^{3k+4}\cdot(k+1)!\cdot(2k+3)}+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+3)}{2^{3k+7}\cdot(k+2)!\cdot(2k+5)}+\ldots<$$

$$<\frac{1}{2^{2k+3}\cdot(2k+3)}+\frac{1}{2^{2k+5}\cdot(2k+5)}+\ldots<\frac{1}{2k+3}\cdot(\frac{1}{2^{2k+3}}+\frac{1}{2^{2k+5}}+\ldots)<$$

$$<\frac{1}{2k+3}\cdot(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{2k+3}}+\frac{1}{2^{2k+5}}+\ldots)=\frac{1}{2k+3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2k+3}$$

значи, сумирањето се изведува се додека $\frac{2}{2k+3}\geq\varepsilon$.

Задача 20. Пресметај ја приближната вредност на $\ln 2$,

1) до k-тиот член
2) со точност $\varepsilon>0$

со помош на развојот на функцијата

а) $\ln(1+x)$ б) $\ln(\frac{1-x}{1+x})$

Упатство.

а) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+\ldots$

б) $\ln(\frac{1-x}{1+x})=-2\cdot(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots)$

4. Текстуални низи (Strings)

Задача 21. Провери дали внесен збор е палиндром или не. (Еден збор е палиндром доколку се чита исто и од лево од десно, на пример „Ана“ е палиндром, додека „ананас“ не е палиндром.)

Задача 22. Одреди го бројот на различни букви од кои е составен еден збор. (На пример, зборот „банана“ е составен од 3 различни букви)
Дополнување. (самостојна работа) излистај ги различните букви, една по една, одделени со запирка.

Задача 23. Испитај дали два внесени збора се анаграми или не. (Анаграм на некој збор е збор составен од истите букви, на пример зборовите „марка“ и „рамка“ се анаграми еден на друг, додека зборовите „камата“ и „тамара“ не се анаграми еден на друг.)

Задача 24. (самостојна работа) Одреди ја „разликата“ на два збора со еднаква должина т.е. бројот на карактери по кои се разликуваат. (На пример, разликата на зборовите „марка“ и „рамка“ е 2, се разликуваат по првиот и третиот карактер.)

Разни задачи

Задача 25. Најди го најмалиот трицифрен број еднаков на збирот од кубовите на своите цифри.

Задача 26. Најди ги сите n-цифрени броеви деливи со $d \in N$, кои во својот десетичен запис не ја содржат цифрата $c \in \{0,1,...,9\}$.

Задача 27. Најди ги сите совршени броеви помали од n. (Еден број е совршен ако е еднаков на збирот од своите делители помали од него, на пример 6 е совршен број затоа што 6=1+2+3.)

Задача 28. Пресметај го збирот на дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ($a,b,c,d \in Z$, $b \neq 0$, $d \neq 0$). Резултатот прикажи го во облик на нескратлива дропка.

Задача 29. За дадена вредност $x \in R$, пресметај e^x со точност $\varepsilon > 0$, според развојот на истата функција во ред т.е. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Забелешка. Сумирањето се изведува се додека $\left|\frac{x^k}{k!}\right| \geq \varepsilon$. Редот за e^x конвергира кон решението со бараната точност, ако $|x|<1$.

Задача 30. Комплексниот број $z = x + iy$, $x, y \in R$, претстави го во тригонометриски облик $z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, при што $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и

$$\varphi = \begin{cases} arctg\,\frac{y}{x} & ,x>0 \\ arctg\,\frac{y}{x}+\pi & ,x<0, y\geq 0 \\ arctg\,\frac{y}{x}-\pi & ,x<0, y<0 \\ \frac{\pi}{2} & ,x=0, y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & ,x=0, y<0 \\ 0 & ,x=0, y=0 \end{cases}$$

Потоа за даден $n \in N$, пресметај n-ти степен и n-ти корен на комплекзниот број z, т.е.

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi) \text{ и}$$

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}), k = 0,1,...,n-1$$

5. Низи од променливи (Arrays)

Задача 31. Нека е дадена низата реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \le 10)$. Најди ја матрицата $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ дефинирана со

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{j} a_k{}^i = a_1{}^i + a_2{}^i + ... + a_j{}^i,\ i, j = 1, 2, ..., n$$

Задача 32. Пресметај ја нормата на матрицата $A_{m \times n}$, ако $\| A \| = \max_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \{ | a_{ij} | \}$.

Задача 33. Пресметај го производот на матриците $A_{m \times n}$ и $B_{q \times p}$. Производот има смисла само ако $n = q$ и тогаш, $C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, p}$.

Задача 34. Пресметај го збирот на матриците $A_{m \times n}$ и $B_{p \times q}$. Збирот има смисла само ако $m = p$ и $n = q$ и тогаш, $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Задача 35. Пресметај го производот на матрицата $A_{m \times n}$ со скаларот $\alpha \in R$, односно производот $\alpha \cdot A$. Имаме, $C_{m \times n} = \alpha \cdot A_{m \times n}$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Задача 36. Пресметај ги производите на матрицата $A_{m \times n}$ со векторот $b \in R^p$, односно производите $A \cdot b$ и $b \cdot A$.

Производот $A \cdot b$ ќе има смисла само за $n = p$, и тогаш $c = A \cdot b$, $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$, $i = \overline{1, m}$ и во тој случај c е вектор колона.

Производот $b \cdot A$ ќе има смисла само за $p = m$, и тогаш $d = b \cdot A$, $d_j = \sum_{i=1}^{m} b_i a_{ij}$, $j = \overline{1, n}$ и во тој случај c е вектор редица.

Задача 37. Најди ја транспорината матрица A^T на матрицата $A_{m \times n}$.

Задача 38. Провери дали квадратната матрица $A_{n \times n}$ е ортогонална т.е. дали $A^T \cdot A = E$.

Задача 39. Најди го збирот на елементите од главната т.е. споредната дијагонала на матривата $A_{n \times n}$.

Задача 40. Најди го збирот на елементи од секоја редица, односно колона на матрицата $A_{m \times n}$ и прикажи го на следниот начин

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & c_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & c_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & c_m \\
-- & -- & \dots & -- & & \\
b_1 & b_2 & \dots & b_n & &
\end{array}
$$

каде $b_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij},\ j = \overline{1,n}$ и $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ i = \overline{1,m}$.

Задача 41. Провери дали квадратната матрица $A_{n\times n}$ е симетрична т.е. дали $A^T = A$.

Задача 42. Нека се дадени матриците $A_{m\times n}$ и $B_{q\times p}$ и скаларот $\alpha \in R$. Пресметај ја матрицата $C = A^2 - \alpha B$.

Задача 43. Низата реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ подреди ја во растечки, односно опаднувачки редослед. (SelectSort)

Задача 44. Најди го бројот на промени на знак во низата $a_1, a_2, ..., a_n$.

Задача 45. Најди НЗД и НЗС на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$.

Задача 46. Најди ги сите прости броеви помали или еднакви на n, со помош на Ератостеново сито.

Задача 47. Нека се дадени низите $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$. Најди го бројот на промени на знак во низата (c_k), каде

$$
c_k = \begin{cases} \min\{a_k, b_k\}, & a_k \ge 0, b_k \ge 0 \\ \max\{a_k, b_k\}, & a_k < 0, b_k < 0 \\ 0 & \text{,инаку} \end{cases}
$$

Задача 48. Дадена е низата $a_1, a_2, ..., a_n$. Одреди ја трагата на матрицата B, ако $b_{ij} = \sum_{s=1}^{i} a_s + \sum_{t=j}^{n} a_t$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

6. Function и Sub процедури

Задача 49. Табелирај ја функцијата $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \ln(x^2 - 4)$ на интервалот $[0, 4]$ со чекор $h = 0.5$.

Задача 50. Табелирај ја функцијата $f(x,y)=\frac{x^2+y}{x-y}+\sqrt{x^2-1}$ на интервалот $[-2,2]\times[-2,2]$ со чекори $h_x=0.5$ и $h_y=0.5$.

Задача 51. Табелирај ги функциите

а) $f(a)=\sqrt[3]{\frac{a-1}{2-a}}$ на интервалот $[x,y]$ со чекор h (ТЕСТ: $x=0, y=3, h=0.25$),

б) $f(a,b)=\frac{b-a^2}{a^2-b^2}$ на интервалот $[m,n]\times[p,q]$ со чекори h_x и h_y (ТЕСТ: $m=0, n=2, p=-1, q=3, h_x=0.25, h_y=0.5$).

Задача 52. Реши ја равенката $x\ln x-1=0$, со точност $\varepsilon>0$. (со метод на десетично делење)
(Прво се локализира коренот дека е единствен и се наоѓа во интервалот $[1,2]$)

Задача 53. Најди ги екстремите и екстремните вредности на изразот $A=x^4-3x^2-x+1$ на интервалот $[c,d]$. (Се решава равенката $g(x)=0$ со метод на десетично делење, каде $g(x)=f'(x)=4x^3-6x-1$, за да се најдат локалните екстреми на $f(x)=x^4-3x^2-x+1$. Имено, равенката $g(x)=0$ има три решенија кои се локализираат дека се во интервалите $[-2,-1]$, $[-1,0]$ и $[1,2]$ соодветно. Потоа, меѓу локалните екстреми и краевите на интервалот $[c,d]$ се наоѓаат глобалните екстреми)

Задача 54. Пресметај приближно $\int_{-1}^{0}\sqrt{4-\sin^2 x}\,dx$, со точност $\varepsilon>0$.

а) Со Риманови суми.

Нека $f(x)$ е непрекината функција на интервалот $[a,b]$. Тогаш, приближната вредност на $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(u_i)\cdot\Delta x_i$, каде $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ е разбивање на $[a,b]$, $u_i\in[x_i,x_{i+1}]$ и $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

За приближно пресметување со точност $\varepsilon>0$, се земаат еквидистантни јазли $x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}$, $i=\overline{0,n}$, при што n се определува така да $\frac{b-a}{n}<\varepsilon$. Следи, $n=[\frac{b-a}{\varepsilon}]+1$, $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$, а за $u_i\in[x_i,x_{i+1}]$ се земаат левите граници на интервалот т.е. $u_i=x_i$. Тогаш, приближната вредност на интегралот е $\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_i)$.

б) Со Симпсонова формула.

Нека $f(x)$ е непрекината функција на интервалот $[a,b]$. Тогаш, приближната вредност на

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left(f(a)+4\cdot\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})+f(b)\right),$$

каде $h=\frac{b-a}{2n}$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_{2n-1}<x_{2n}=b$ се еквидистантни јазли на $[a,b]$, т.е. $x_k=a+k\cdot h$, $k=\overline{0,2n}$.

За приближно пресметување со точност $\varepsilon > 0$, се пресметува се додека $\frac{|I_1 - I_2|}{2^4 - 1} \geq \varepsilon$ (Рунгеов критериум), каде I_1 и I_2 се две последователни проближни вредности на интегралот добиени за чекори h_1 и $h_2 = \frac{1}{2} h_1$ соодветно, односно при две последователни вредности на n.

Забелешка.
Конвергенцијата со бараната точност е побрза при примена на Симпсоновата формула отколку со примена на Римановите суми.

7. Графика во VB (основни поими)

Задача 55. Нацртај го графикот на функцијата f(x) на [a, b] и табелирај ја истата на [a, b] со чекор h.

а) $f(x) = \frac{x\sqrt{x-2}}{x+5} - \ln(x+7)$ б) $f(x) = \sin(2x) + \sqrt{\frac{4-x^2}{x-1}}$

8. Работа со датотеки во VB (основни поими)

Задача 56. Креирај датотека со податоци за животни во една зоолошка градина (име, вид, количина, големина на живеалиште во m^2)
а) излистај ги сите жувотни во зоолошката градина
б) излистај ги птиците во зоолошката градина
в) најди го животното кое има најголемо живеалиште по единка (големина на живаелаиште/количина)
г) сортирај ги животните според името

Разни задачи

Задача 57. Провери дали матрицата A од ред n е
1) инволуторна ($A^2 = E$)
2) нилпотентна ($A^2 = O$)
3) иденпотентна ($A^2 = A$)
4) ниедно од горе наведените

Задача 58. Најди ги $tr(AA^T)$ и $tr(A^T A)$ за матрицата A дефинирана со $a_{ij} = f(i+j)$, каде

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, x < y \\ x \cdot y, x = y \\ x - y, x > y \end{cases}.$$