Департман менаџмент,
Економски факултет, УКИМ, Скопје
(учебна 2020/2021 година – зимски семестар)

ОПЕРАЦИОНИ ИСТРАЖУВАЊА

- ПОВЕЌЕКРИТЕРИУМСКО ОДЛУЧУВАЊЕ -

Проф. д-р Ирена Стојковска,
Институт за математика,
Природно-математички факултет,
УКИМ, Скопје

E-mail: irena.stojkovska@gmail.com

Web: https://nastava-istojkovska.weebly.com/

Повеќекритериумско одлучување (MCDM)

[6] E. Triantaphyllou, B. Shu, S.Nieto Sanchez, T. Ray, *Multi-Criteria Decision Making: An Operations Research Approach*, Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, John Wiley & Sons, New York, NY, Vol. 15, pp. 175 - 186 (1998).

Повеќекритериумското одлучување (Multi-Criteria Decision Making – MCDM) претставува широка класа на модели на донесување на одлуки кога има повеќе критериуми на одлучување.

MCDM методите се делат на:

- модели на **повеќецелно одлучување** (Multi-Objective Decision Making – MODM) - просторот на одлуки е непрекинат
- модели на **повеќеатрибутно одлучување** (Multi-Attribute Decision Making - MADM) -дискретен простор на одлуки

Повеќеатрибутно одлучување (MADM)

Заеднички карактеристики на MADM методите се:

- **Алтернативи** –избори достапни на доносителот на одлуки, конечно множеството од алтернативи
- **Повеќе атрибути** –цели или критериуми за одлучување, различни димензии на гледање на алтернативите
- **Конфликт меѓу атрибутите** - различни атрибути претставуваат различни димензии на алтернативите, на пример, конфликт меѓу трошоците и профитот итн.
- **Неспоредливи единици** – различни атрибути може да имаат различни единици мерки, на пример, при купување на автомобил, трошокот и изминатата километража се изразуваат во различи единици мерки
- **Тежини на одлуките** – повеќето од MADM методите бараат на атрибутите да им бидат придружени тежини на важност. Вообичаено е овие тежнини да се нормализирани, односно сумата да им е 1.

Повеќеатрибутно одлучување (MADM)

- **Матрица на одлуки** – A е MxN матрица чии елементи aij се важностите на алтернативата Ai кога таа е евалуирана според критериумот Cj (i=1,2,…,M, j=1,2,…,N). Се претпосатвува дека доносителот на одлуки ги има одредено реаливните тежини на критериумите W1, W2, …, WN.

Алтернативи	Критериуми (Атрибути)			
	C1	C2	…	CN
	W1	W2	…	WN
A1	a11	a12	…	a1N
A2	a21	a22	…	a2N
…	…	…		…
AM	aM1	aM2	…	aMN

Повеќеатрибутно одлучување (MADM)

- Класификација на MADM методите
  - според типот на податоци кои ги користат: детерминистички, стохастички и фази
  - според бројот на доносители на одлуки: индивидуални и групни
- Примена на MADM методите
  - производство, инвестиции, инженерски проблеми и др.
- Илустративен пример - надградба на комјутер (алтернативи - различи конфигурации, критериуми за одлучување - цената, брзината, достапниот софтвер, одржувањето. Целта е да се најде **најдобрата алтернатива** (најдобрата конфигурација) при сите разгледувани критериуми. Многу често **критериумите се конфликтни** еден на друг, на пример подобра (пониска) цена може да значи полош (поспор) процесот на комјутерот.

Техники на повеќеатрибутно одлучување (MADM)

- Моделот на тежински суми (Weighted Sum Model –WSM) е најраниот и можеби најкористениот метод.
- Моделот на тежински производи (Weighted Product Model –WPM) може да се смета за модификација на WSM, и е предложен за да ги надмине неговите слабости.
- Моделот на аналитички хиерархиски процес (Analytic Hierarchy Process – AHP) предложен од Saaty (1980), е подоцнежен метод кој бележи голема популарност.
- Belton and Gear (1983) предлагаат модификација на AHP моделот која се покажала помоќна од оригиналната.
- Некои од останатите широко прифатени MADM методи се ELECTRE и TOPSIS.

Опис на некои MADM методи

Трите важни чекори при користење на техника за повеќекритериумско одлучување се:

- Одредување на критериумите и алтернатвите.
- Доделување на нумерички мерки за релативна важност на критериумите и на нивното влијание на алтернативите.
- Процесирање на нумеричките вредности за да се рангираат алтернативите.

Во продолжение ќе го илустрираме чекорот 3 за методите WSM, WPM, AHP и ревидирана AHP.

- Нека се дадени алтернативите A1,A2,…,AM, критериумите за одлучување C1,C2,…,CN, и матрицата за одлучување A=[aij] заедно со тежините на критериумите W1, W2,…,WN.

Модел на тежински суми (Weighted Sum Model –WSM)

- Најдобрата алтернатива и таа чија тежинска сума е максимална (во случај на проблем на максинизаиција) т.е.

$$A_{WSM}* = \max_{1 \le i \le M} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} w_j$$

- Претпоставката на која се потпира овој модел е **претпоставката за адитивна корисност**, т.е. вкупната вредност на секоја алтернатива е еднаква на збирот од производите дадени со формулата.
- Во еднодимензионалните случаи, кога сите единици мерки се исти, WSM моделот може да се користи без проблеми. Потешкотии настануваат кога се применува на повеќедимензионални проблеми.

Модел на тежински суми (Weighted Sum Model –WSM)

Пример 1. Нека е дадена следната матрица на одлучување (со 3 алтернативи и 4 критериуми):

Алтернативи	Критериуми			
	C1	C2	C3	C4
	0,20	0,15	0,40	0,25
A1	25	20	15	30
A2	10	30	20	30
A3	30	5	30	5

$WSM(A1) = 25 \cdot 0,20 + 20 \cdot 0,15 + 15 \cdot 0,40 + 30 \cdot 0,25 = 21,50$

$WSM(A2) = 10 \cdot 0,20 + 30 \cdot 0,15 + 20 \cdot 0,40 + 30 \cdot 0,25 = 22,00$

$WSM(A3) = 30 \cdot 0,20 + 5 \cdot 0,15 + 30 \cdot 0,40 + 5 \cdot 0,25 = 20,00$

Рангирање на алтернативите: A2 > A1 > A3

Модел на тежински производи (Weighted Product Model –WPM)

- За да се споредат алтернативите AK и AL се пресметува следниот производ:

$$R(A_K / A_L) = \prod_{j=1}^{N} (a_{Kj} / a_{Lj})^{w_j}$$

- Ако R(AK/AL) > 1, тогаш алтернативата AK е попосакувана од алтернативата AL (во случај на максимизација). Најдобрата алтернатива е онаа која е подобра или најмалку еднаква на сите останати алтернативи.
- WPM се нарекува и бездимензионален критериум, бидејќи при пресметување на R(AK/AL) се елиминираат едниниците мерки, затоа може да се користи и за едно и за повеќедимензионални проблеми на одлучување.

Модел на тежински производи (Weighted Product Model –WPM)

Пример 2. Нека е дадена матрица на одлучување од Пример 1:

Алтернативи	Критериуми			
	C1	C2	C3	C4
	0,20	0,15	0,40	0,25
A1	25	20	15	30
A2	10	30	20	30
A3	30	5	30	5

$R(A1/A2) = (25/10) ^\wedge 0{,}20 \cdot (20/30) ^\wedge 0{,}15 \cdot (15/20) ^\wedge 0{,}40 \cdot (30/30) ^\wedge 0{,}25 = 1{,}00739 > 1 \Rightarrow A1>A2$

$R(A1/A3) = (25/30) ^\wedge 0{,}20 \cdot (20/5) ^\wedge 0{,}15 \cdot (15/30) ^\wedge 0{,}40 \cdot (30/5) ^\wedge 0{,}25 = 1{,}40799 > 1 \Rightarrow A1>A3$

$R(A2/A3) = (10/30) ^\wedge 0{,}20 \cdot (30/5) ^\wedge 0{,}15 \cdot (20/30) ^\wedge 0{,}40 \cdot (30/5) ^\wedge 0{,}25 = 1{,}39765 > 1 \Rightarrow A2>A3$

Рангирање на алтернативите: A1 > A2 > A3

Аналитички хиерархиски процес (Analytic Hierarchy Process – AHP)

- AHP се базира на расчленување на сложениот MCDM проблем на систем од хиерархии. Последниот чекор од AHP процесот се состои од матрица на одлучување која е конструирана од релативните важности на алтернативите во однос на критериумите добиени со попарни споредби меѓу М-те алтернативи за секој од критериумите.
- Карактеристично за AHP матрицата на одлучување е дека вредностите aij преставуваат релативни вредности на алтернативата Ai во однос на критериумот Cj, сумата во секоја колона е еднаква на 1, па може да се користи и за повеќедимензионални проблеми.
- Според AHP процесот најдобрата алтернатива е одредена со

$$A_{AHP}{}^{*} = \max_{1 \le i \le M} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} w_j$$

Аналитички хиерархиски процес (Analytic Hierarchy Process – AHP)

Пример 3. Нека е дадена матрица на одлучување од Пример 1, но со релативни вредности на алтернативите во однос на секој од критериумите (колоните се нормализирани за да збирот е 1):

Алтернативи	Критериуми			
	C1	C2	C3	C4
	0,20	0,15	0,40	0,25
A1	25/65	20/55	15/65	30/65
A2	10/65	30/55	20/65	30/65
A3	30/65	5/55	30/65	5/65

AHP(A1) = (25/65) · 0,20 + (20/55) · 0,15 + (15/65) · 0,40 + (30/65) · 0,25 = 0,339161

AHP(A2) = (10/65) · 0,20 + (30/55) · 0,15 + (20/65) · 0,40 + (30/65) · 0,25 = 0,351049

AHP(A1) = (30/65) · 0,20 + (5/55) · 0,15 + (30/65) · 0,40 + (5/65) · 0,25 = 0,30979

Рангирање на алтернативите: A2 > A1 > A3

Ревидиран аналитички хиерархиски процес (Revised Analytic Hierarchy Process – AHP)

- Belton and Gear (1983) покажале дека AHP процесот може да биде неконзистентен. Во нивниот пример, се менува најдобрата алтернатива кога ќе се воведе нова четврта алтернатива идентична на некоја од неоптималните алтернативи.

Пример 4.

Нека е дадена матрица на одлучување со три алтернативи и три критериуми:

Алтерна-тиви	Критериуми		
	C1	C2	C3
	1/3	1/3	1/3
A1	1	9	8
A2	9	1	9
A3	1	1	1

Според AHP методот матрицата со релативни вредности на алтернативите е:

Алтерна-тиви	Критериуми		
	C1	C2	C3
	1/3	1/3	1/3
A1	1/11	9/11	8/18
A2	9/11	1/11	9/18
A3	1/11	1/11	1/18

$A \cdot w = (0{,}451178;\ 0{,}46969;\ 0{,}0791246)$

Рангирање на алтернативите: A2 > A1 > A3

Ревидиран аналитички хиерархиски процес (Revised Analytic Hierarchy Process – AHP)

Сега, воведуваме нова алтернатива A4 која е идентична копија на алтернативата A2. Новата матрица на одлучување е:

Алтерна-тиви	Критериуми		
	C1	C2	C3
	1/3	1/3	1/3
A1	1/20	9/12	8/27
A2	9/20	1/12	9/27
A3	1/20	1/12	1/27
A4	9/20	1/12	9/27

Конечниот AHP вектор е A · w = (0,365432; 0,288889; 0,0567901; 0,288889), од каде рангирањето на алтернативите е A1 > A2 ● A4 > A3, што противречи на претходниот резултат каде A2 > A1.

Ревидиран аналитички хиерархиски процес (Revised Analytic Hierarchy Process – AHP)

Наместо да се разгледуваат релативните вредности на алтернативите, според ревидираниот AHP секоја релативна вредност се дели со најголемата од релативните вредности на алтернатовите. Матрицата на одлучување е:

Алтерна-тиви	Критериуми		
	C1	C2	C3
	1/3	1/3	1/3
A1	1/20	9/12	8/27
A2	9/20	1/12	9/27
A3	1/20	1/12	1/27
A4	9/20	1/12	9/27

Алтерна-тиви	Критериуми		
	C1	C2	C3
	1/3	1/3	1/3
A1	1/9	1	8/9
A2	1	1/9	1
A3	1/9	1/9	1/9
A4	1	1/9	1

Конечниот ревидиран AHP вектор е A · w = (0,666667; 0,703704; 0,111111; 0,703704), од каде рангирањето на алтернативите е A2 ● A4 > A2 > A3 и не противречи на рангирањето пред воведувањето на идентичната алтернатива.

Попарни споредби на алтернативите

- Со **попарната споредба** се одредува релативната важност на секоја алтернатива при секој од критериумите. При овој пристап доносителот на одлуки треба да го изрази своето мислење за секој пар од алтернативи засебно. Обично, тој треба да одбете некој лингвистички одговор од множество одговори, како на пример „A е поважно од B“, или „A има иста важност како B“, или „A е малку повеќе поважно од B“ итн.
- Попарните споредби се квантифицитраат со користење на **скала**. Скалата претставува еднозначно доделување нумерички вредности на секоја лингвистичка фраза, нумеричките вредности претставуваат важности или тежини.
- Saaty (1980) има предложено **линеарна скала** како дел од AHP процесот.
- Други скали кои се користат е **експоненцијалната скала** на Lootsma (1988). И двата пристапа имаат произлезено од психолошки теории.

Фундаментална скала на Saaty за попарна споредба на алтернативите

Интензитет на важност	Дефиниција	Опис
1	Еднакво важно	Двете активности подеднакво придонесуваат за целта
3	Умерено поважно	Искуството и проценката незначително ја фаворизираат едната активност во однос на другата
5	Строго поважно	Искуството и проценката строго ја фаворизираат едната активност во однос на другата
7	Многу строга или докажана важност	Едната активност строго се фаворизира во однос на другата, незјината доминација се докажува во пракса
9	Екстремна важност	Доказите врз основа на кои се фаворизира едната активнист во однос на другата е потврдени со најголема уверливост
2, 4, 6, 8	За компромис меѓу дадените вердности	Понекогаш треба да се земе вредност помеѓу затоа што не може добро да се опише фаворизирањето

Попарни споредби на алтернативите

Пример 5. Да споредиме попарно три града (алтернативи) – Париз, Лондон, Њујорк во однос на тоа кој има поубав амбиент (критериум). Ако споредбата на Ai со Aj резултирала со нумеричка вредност Sij од фундаменталната скала, тогаш при споредбата на Aj со Ai се користи реципрочната вредност 1/Sij, т.е. Sji = 1/Sij.

Алтерна-тиви	**Алтернативи**		
	Париз	Лондон	Њујорк
Париз	1	2	5
Лондон	1/2	1	3
Њујорк	1/5	1/3	1
Σ	17/10	10/3	9

Добиената матрица од попарни споредби се нормализира:

Алтерна-тиви	**Алтернативи**		
	Париз	Лондон	Њујорк
Париз	10/17	6/10	5/9
Лондон	5/17	3/10	3/9
Њујорк	2/17	1/10	1/9
Σ	1	1	1

Попарни споредби на алтернативите

- Релативните вредности на алтернативите (Париз, Лондон, Њујорк) според разгледуваниот критериум (поубав амбиент) се добиваат како средни вредности на секоја од редиците во нормализираната матрица на попарни споредби:

Алтерна-тиви	Алтернативи		
	Париз	Лондон	Њујорк
Париз	10/17	6/10	5/9
Лондон	5/17	3/10	3/9
Њујорк	2/17	1/10	1/9
Σ	1	1	1

Париз	**0,581264**
Лондон	0,309150
Њујорк	0,109586

На пример, (10/17 + 6/10 + 5/9) / 3 = 0,581264 итн.

- Одредувањето на важноста на критериумите, односно одредувањето на тежините на критериумите (w1, w2, ..., wN) се прави на сличен начин.

Анализа на осетливост

- **Анализата на осетливост** се спроведува за да се увиди како промената на влезните податоци (aij и wj) влијае на рангирањето на алтернативите.
- Во литераурата се среќаваат повеќе насоки за анализа на осетливоста, меѓу кои и таа дека ако влезните податоци во сите можни комбинации се променат за 5%, а при тоа рангирањето на алтернативите остане исто, тогаш се смета дека добиените резултати се стабилни.