ОСНОВИ НА ВЕРОЈАТНОСТ & ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА

I. ВЕРОЈАТНОСНИ МОДЕЛИ

Проф. д-р Ирена Стојковска,
Институт за математика,
Природно-математички факултет,
УКИМ, Скопје

E-mail: irena.stojkovska@gmail.com

1. Случајни настани

- **Теоријата на веројатност** е гранка од математиката која ги анализира случајните феномени.
- **Случаен експеримент** е процес со повеќе можени исходи наречени **елементарни настани (w)**.
- Множеството од сите можни исходи на еден еспериментсе нарекува **простор од елементарни настани (Ω)**.
- Некои од подмножествата на Ω ги нарекуваме **случајни настани** или само **настани**.
- **Настанот A се реализирал** ако се остварил некој елементарен настан w од A.

1. Случајни настани

- Релации со настани ($A \subseteq B$, $A=B$)
- Операции со настани ($A \cup B$, $A \cap B$ или AB, $A \setminus B$, $A^c = \Omega \setminus A$)

Пример 1.1. Фрлање на коцка за играње. Да го разгледаме експериментот на фрлање на коцка за играње. Ги дефинираме настаните
$A = \{$паднати се парен број на точки$\}$ и
$B = \{$паднати се број на точки поголем од три$\}$.
Тогаш, имаме дека
$A \cup B = \{$паднати се број на точки различен од еден и три$\}$,
$A \cap B = \{$паднати се четири или шест точки$\}$,
$A \setminus B = \{$паднати се две точки$\}$,
$B \setminus A = \{$паднати се пет точки$\}$,
$\overline{A} = \{$паднати се непарен број на точки$\}$.

1. Случајни настани

- Фамилијата од сите настани ја означуваме со $\mathcal{F}$.
- Ω – сигурен настан, $\emptyset$ - невозможен настан

Дефиниција 1.1. Фамилијата $\mathcal{F}$ од подмножества од Ω ја нарекуваме **алгебра** од настани, ако ги задоволува следните услови:

(i) Ако $A \in \mathcal{F}$, тогаш и $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,

(ii) Ако $A, B \in \mathcal{F}$, тогаш и $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Лема 1.1. *Нека $\mathcal{F}$ е алгебра од настани, тогаш*

(i) Ако $A, B \in \mathcal{F}$, тогаш и $A \cap B \in \mathcal{F}$,

(ii) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.

1. Случајни настани

Лема 1.2. *Нека $\mathcal{F}$ е алгебра од настани. Ако $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$, тогаш*

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \text{ и } \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}.$$

Доказ. Со принцип на математичка индукција. ∎

Дефиниција 1.2. Фамилијата $\mathcal{F}$ од подмножества од Ω ја нарекуваме **σ-алгебра** од настани, ако ги задоволува следните услови:

(i) Ако $A \in \mathcal{F}$, тогаш и $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,

(ii) Ако $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F}$, тогаш и $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Лема 1.3. *Нека $\mathcal{F}$ е σ-алгебра од настани, тогаш*

(i) Ако $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F}$, тогаш и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$,

(ii) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.

1. Случајни настани

- Елементите на алгебрите и σ-алгебрите од подмножества од Ω се нарекуваат **случајни настани** или само **настани**.

Пример 1.2. Примери за σ-алгебри. Ќе наведеме неколку примери за σ-алгебри.
а) Тривијалната σ-алгебра $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.
б) Партитивното множество на Ω т.е. $\mathcal{P}(\Omega)$ е σ-алгебра.
в) Нека $A \subset \Omega$ е произволно, тогаш $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ е σ-алгебра.

Од дефинициите за алгебра и σ-алгебра јасно е дека секоја σ-алгебра е и алгебра, но обратното не мора да важи.

1. Случајни настани

Пример 1.3. Пример за алгебра која не е σ-алгебра. Ќе наведеме пример на алгебра која не е σ-алгебра. Нека $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$ и нека $\mathcal{F}$ е фамилија од сите подмножества на Ω кои се конечни или имаат конечен комплемент. Лесно се воочува дека $\mathcal{F}$ е алгебра. Но, $\mathcal{F}$ не е σ-алгебра. На пример, множеството од сите парни броеви не припаѓа на $\mathcal{F}$, а може да се претстави како преброива унија од едноелементни подмножества од Ω од кои сите припаѓаат на $\mathcal{F}$.

Лема 1.4. *Пресек на произволен број σ-алгебри од подмножества од Ω е исто така σ-алгебра.*

1. Случајни настани

Лема 1.5 (**за минимална σ-алгебра**). *Ако $\mathcal{K}$ е произволна фамилија од подмножества од Ω, тогаш постои минимална σ-алгебра од подмножества од Ω која ја содржи фамилијата $\mathcal{K}$, се означува со $\sigma(\mathcal{K})$, и се нарекува* **σ-алгебра генерирана од $\mathcal{K}$**.

Пример 1.4. Борелова σ-алгебра. Ако $\Omega = \mathbb{R}$, тогаш најкористена σ-алгебра над $\mathbb{R}$ е **Бореловата σ-алгебра** која се означува со $\mathcal{B}$ и се дефинира како σ-алгебра генерирана од фамилијата од полу-отворени интервали од $\mathbb{R}$ т.е. генерирана од $\{(a, b] : -\infty < a < b < \infty\}$. Да забележиме дека постојат различни фамилии кои ја генерираат $\mathcal{B}$, како што се фамилијата од отворени интервали, затворени интервали, отворени полу-прави, затворени полу-прави. Секое множество $B \in \mathcal{B}$ се нарекува **Борелово множество**.

2. Простор на веројатност

Дефиниција 2.1. Функцијата $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ е **веројатносна мера** (или само **веројатност**), ако ги задоволува следните услови:

(P1) **(ненегативност)** $P(A) \geq 0$, за секој $A \in \mathcal{F}$,

(P2) **(нормализираност)** $P(\Omega) = 1$,

(P3) **(σ-адитивност)** Ако настанте $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ се по парови дисјунктни т.е. $A_i \cap A_j = \emptyset$, за секои $i \neq j$, тогаш важи

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

2. Простор на веројатност

Условите $P1 - P3$ кои треба да ги задоволува веројатноста P се нарекуваат **аксиоми на теоријата на веројатност** или **Колмогорови аксиоми** според рускиот математичар Андреј Н. Колмогоров, основачот на модерната теорија на веројатност, 1933.

Дефиниција 2.2. Подредената тројка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, каде Ω е простор од елементарни настани, $\mathcal{F}$ е σ-алгебра од подмножества од Ω и P е воројатност дефинирана над $\mathcal{F}$, се нарекува **простор на веројатност**.

- Интерпретации на поимот веројатност:
  1) долгорочна фрекфенција од низа од повторливи експерименти (релативна честота на појавување на настанот A, $P(A) \approx k/N$)
  2) индивидуален степен на верување во појавата на настанот A (субјективна веројатност)

2. Простор на веројатност

Лема 2.1. *Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност, тогаш*

(i) *(веројатност на невозможниот настан)* $P(\emptyset) = 0$,

(ii) *(конечна адитивност) Ако настанте* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ *се по парови дисјунктни т.е.* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *за секои* $i \neq j$, *тогаш важи*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

(iii) *(веројатност на спротивниот настан)* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,

(iv) *Ако* $A \subseteq B$, *тогаш* $P(A) \leq P(B)$,

2. Простор на веројатност

(v) *(Лема за покривање) За настаните* $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{F}$ *важи*

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

(vii) *(Принцип на вклучување и исклучување) За настанте* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ *важи*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k)$$

$$- ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n),$$

2. Простор на веројатност

(viii) *(непрекинатост од горе) Ако за настаните* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ *важи* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, *тогаш*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big),$$

(ix) *(непрекинатост од долу) Ако за настаните* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ *важи* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, *тогаш*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big),$$

(x) *(непрекинатост во нула) Ако за настаните* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ *важи* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ *и* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, *тогаш*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

2. Простор на веројатност

Како последица од аксиомите на теорија на веројатност и својствата изложени во Лема 2.1, имаме дека за секој настан $A \in \mathcal{F}$ важи $0 \leq P(A) \leq 1$.

Теорема 2.1. *Нека $(\Omega, \mathcal{F})$ е мерлив простор и нека $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ е функција која е конечно адитивна и непрекината во нула. Тогаш, P е σ-адитивна.*

3. Класична дефиниција на веројатност

Дефиниција 2.3. Нека $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, ...\}$ е простор од елементарни настани и нека $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. На секој елементарен настан $w_i \in \Omega$ му придружуваме веројатност p_i така што да важи

(i) $p_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, ...,$

(ii) $p_1 + p_2 + p_3 + ... = 1.$

Нека $A = \{w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3}, ...\} \subseteq \Omega$ е произволен настан. Дефинираме веројатност на настанот A со

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3} + ...$$

Тогаш, просторот $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е **дискретен простор на веројатност**. Ако Ω е конечно множество, тогаш станува збор за **конечен простор на веројатност**.

3. Класична дефиниција на веројатност

Дефиниција 2.4. Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е конечен простор на веројатност, при што сите елементарни исходи се еднакво веројатни, односно

$$\Omega = \{w_1, w_2, , ..., w_N\} \text{ и } p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{N}.$$

Тогаш, веројатноста на произволен настан $A = \{w_{i_1}, w_{i_2}, ..., w_{i_k}\} \subseteq \Omega$ се пресметува според

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}. \qquad (2.1)$$

- Формулата (2.1) е **класична дефиниција на веројатност**.
- За пресметување на кардиналноста на Ω и A се користат методи за пребројување со кои се занимава гранката од математиката позната како **комбинаторика**.

3. Класична дефиниција на веројатност

A={a, b, c}, |A|=n

- Варијации без повторување од n елементи класа k
  Пр. n=3, k=2, (a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b)
  $$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$
- Варијации со повторување од n елементи класа k
  Пр. n=3, k=2, (a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)
  $$\overline{V}_n^k = n^k.$$
- Пермутации од n елементи
  Пр. n=3, (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)
  $$P_n = n!.$$
- Комбинации без повторување од n елементи класа k
  Пр. n=3, k=2, {a,b}, {a,c}, {b,c}
  $$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
- Комбинации со повторување од n елементи класа k
  Пр. n=3, k=2, {a,a}, {a,b}, {a,c}, {b,b}, {b,c}, {c,c}
  $$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

3. Класична дефиниција на веројатност

A={a, b, c}, |A|=r

- Пермутации со повторување од n елементи тип k1, k2, ..., kr
  Пр. n=4, k1=1, k2=2,k3=1, (a,b,b,c), (a,b,c,b), (a,c,b,b), (b,a,b,c), (b,a,c,b), (b,b,a,c), (b,b,c,a), (b,c,b,a), (b,c,a,b), (c,a,b,b), (c,b,a,b), (c,b,b,a)

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_r!}.$$

Пример 2.1. Игра со монета. Двајца играчи играат игра со монета на следниот начин: Ако на монетата се падне "глава", првиот играч добива еден поен, ако на монетата се падне "писмо", вториот играч добива еден поен. На почетокот од играта и двајцата играчи имаат по нула поени. Знаеме дека монетата е исправна, односно подеднакви се шансит да при едно фрлање на монетата се падне "глава", односно "писмо". Да ја најдеме веројатноста дека после $2n$ фрлања двајацата играчи имаат еднаков број на поени.

Резиме (1-3)

- Случаен експеримент, простор елеменатрни настани, случаен настан
- Релации и операции со настани, σ-алгебра од настани
- Веројатност, простор на веројатност
- Својства на веројатноста
- Класична дефиниција на веројатност
- Методи за пребројување од комбинаторика

4. Геометриска веројатност

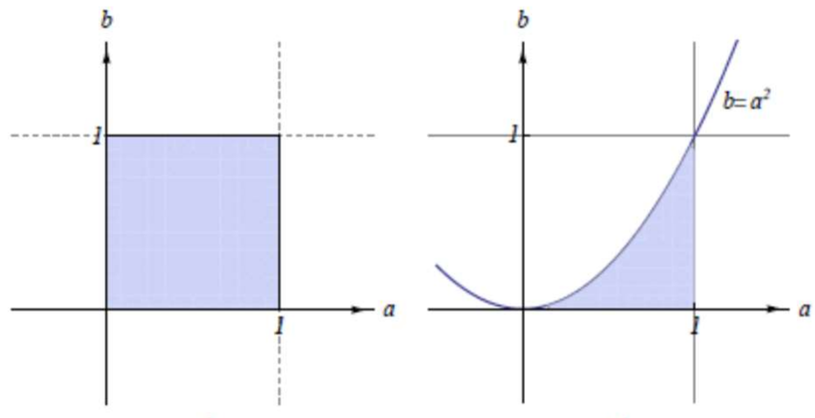
Дефиниција 2.11. Нека $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$ е n-димензионалната Борелова σ-алгебра од n-димензионални Борелови подмножества од $\mathbb{R}^n$. Претпоставуваме дека положбата на честичка која случајно паѓа во областа Ω е рамномерно распределена на таа област, односно дека веројатноста честичката да падне во областа $A \in \mathcal{B}^n$ е пропорционална со n-димензионалниот волумен $m(A)$ на таа област, т.е.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Тогаш, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е **геометриски веројатносен модел**, а (2.2) е формула за **геометриска веројатност**.

4. Геометриска веројатност

Пример 2.4. Реални корени на квадратна равенка. Коефициентите a и b од равенката $x^2 + 2ax + b = 0$ се случајно избрани броеви од интервалот $[0, 1]$. Да ја најдеме веројатноста дека равенката има реални корени.



4. Геометриска веројатност

- Парадокси во теоријата на веројатност

Пример 2.6. Бертрандов парадокс. Нека е дадена кружница со впишан рамностран триаголник во неа. Да ја најдеме веројатноста да должината на случајно избрана тетива од кружницата е поголема од должината на станата на рамностраниот триаголник.