ОСНОВИ НА ВЕРОЈАТНОСТ & ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА

II. УСЛОВНА ВЕРОЈАТНОСТ. НЕЗАВИСНОСТ

Проф. д-р Ирена Стојковска,
Институт за математика,
Природно-математички факултет,
УКИМ, Скопје

E-mail: irena.stojkovska@gmail.com

1. Условна веројатност

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност.

Дефиниција 3.1. Нека A и B се произволни настани, така што $P(B) > 0$. **Условна веројатност на настанот A при услов B** е бројот $P(A|B)$ дефиниран со

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{3.1}$$

- Лесно се покажува дека $(\Omega, \mathcal{F}, P(.|B))$ е простор на веројатност.

Пример 3.1. Две шестки. Хомогена коцка за играње се фрла два пати. Да ја најдеме веројатноста дека два пати се паднале по 6 точки, ако се знае дека во двете фрлања се паднале парен број на точки.

1. Условна веројатност

$$P(AB) = P(B)P(A|B). \tag{3.2}$$

Равенството (3.2) е познато како **формула за множење на веројатности**.

Пример 3.3. Медицински тест. Тестот за одредена ретка болест е точен во 95% од случаите, што значи дека, ако некој пациент ја има болеста, резултатите од тестот се позитивни со веројатност 0,95, и ако пациентот ја нема болеста, резултатите од тестот се негативни со веројатност 0,95. Случајно избран пациент ја има болеста со веројатност 0,001. Да ги одредиме веројатноста тестот да е негативен за лице кое ја има болеста и веројатноста тестот да е позитивен за лице кое ја нема болеста.

1. Условна веројатност

Теорема 3.1 (Теорема за множење на веројатности.). *Нека настаните* A_1, A_2, ..., A_n *се такви да* $P(A_1 A_2 ... A_{n-1}) > 0$. *Тогаш,*

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) ... P(A_n|A_1 A_2 ... A_{n-1}). \tag{3.3}$$

Доказ. Со индукција по n и формулата за множење на веројатности (3.2). ■

Пример 3.5. Роденденски проблем. Да претпоставиме дека родендените на луѓето се рамномерно распределени во текот на една непрестапна година од 365 дена. Да ја надеме веројатноста да меѓу n случајно избрани луѓе, најмалку два од нив имаат роденден на ист ден.

2. Тотална веројатност и Бејзови формули

Теорема 4.1 (Теорема за тотална веројатност.). *Нека настаните* $B_1, B_2, ..., B_n$ *формираат разбивање на* Ω *т.е.* $B_iB_j = \emptyset$, *за секои* $i \neq j$ *и* $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. *Нека* $P(B_i) > 0$ *за секој* $i = 1, 2, ..., n$. *Тогаш, за секој настан* A *важи*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i). \tag{4.1}$$

Пример 4.2. Монти Хол проблем. Една наградна игра се состои во тоа што натпреварувачот случајно одбира (со еднаква веројатност) една од три врати, од кои едната крие нов автомобил, а останатите две по една коза. Откако тој ќе го направи изборот, водителот отвара една од неизбраните врати позади која со сигурност не е автомобилот и му дава можност на натпреварувачот да го смени својот претходен избор т.е. да посочи нова врата. Дали натпреварувачот има поголеми шанси да го добие автомобилот кога ќе го задржи својот првобитен избор или кога ќе посочи нова врата?

2. Тотална веројатност и Бејзови формули

Теорема 4.2 (**Баесово правило.**). *Нека настаните* $B_1, B_2, ..., B_n$ *формираат разбивање на* Ω *т.е.* $B_i B_j = \emptyset$, *за секои* $i \neq j$ *и* $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. *Нека* $P(B_i) > 0$ *за секој* $i = 1, 2, ..., n$. *Тогаш, за секој настан* A, *за кој* $P(A) > 0$, *важи*

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)},\ i = 1, 2, ..., n. \qquad (4.2)$$

Пример 4.4. Медицински тест. Тестот за одредена ретка болест е точен во 95% од случаите, што значи дека, ако некој пациент ја има болеста, резултатите од тестот се позитивни со веројатност 0,95, и ако пациентот ја нема болеста, резултатите од тестот се негативни со веројатност 0,95. Случајно избран пациент ја има болеста со веројатност 0,001. Ако резултатите од штотуку извршен тест се позитивни, да ја најдеме веројатноста дека пациентот ја има болеста.

3. Независност на настани

Ако P(A|B) = P(A), тогаш настанот A не зависи од настанот B.

Ако A не зависи од B, тогаш и B не зависи од A.

Дефиниција 5.1. Настаните A и B се **независни**, ако важи

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{5.1}$$

Лема 5.1. *Нека $A, A_1, A_2, B \in \mathcal{F}$ се произволни настани. Тогаш,*

(i) ако настаните A и B се независни, тогаш независни се и настаните $\overline{A}$ и B; A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

(ii) ако настаните A_1 и B се независни, настаните A_2 и B се независни и $A_1A_2 = \emptyset$, тогаш незвисни се и настаните $A_1 + A_2$ и B.

3. Независност на настани

Дефиниција 5.2. Настаните $A_1, A_2, ..., A_n$ се **независни (во целина)**, ако за секои $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ и $2 \leq k \leq n$ важи

$$P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) ... P(A_{i_k}). \tag{5.2}$$

Доколку настаните $A_1, A_2, ..., A_n$ се наезависни (во целина), од Дефиниција 5.2 следи дека тие се и попарно независни, односно A_i и A_j се независни, за секои $i \neq j$. Обратното не мора да важи.

Дефиниција 5.4. Нека C е фиксен настан со $P(C) > 0$. Настаните A и B се **условно независни** во однос на C, ако важи

$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|C). \tag{5.4}$$

3. Независност на настани

Пример 5.3. Безусловна независност не повлекува условна независност. Фер монета независно се фрла два пати. Нека A - во првото фрлање паднала "глава", B - во второто фрлање паднала "глава", и C - исходите од двете фрлања се различни. Ќе покажеме дека, настаните A и B се безусловно независни, но не се условно независни во однос на настанот C.

...

Пример 5.4. Условна независност не повлекува безусловна независност. Во две кутии се сместени бели и црни топчиња, така што во првата кутија има 1 бело и 3 црни топчиња, а во втората кутија има 3 бели и 1 црно топче. На случаен начин (со еднаква веројатност) се избира една од кутиите, а потоа од избраната кутија се извлекуваат две топчиња, едно по едно со враќање. Нека A - извлечено е бело топче во првото извлекување, B - извлечено е бело топче во второто извлекување, и C - избрана е првата кутија. Ќе покажеме дека, настаните A и B се условно независни во однос на настанот C, но не се безусловно независни.

...

Резиме (I.4, II.1-3)

- Геометриската веројатност како геметриски аналог на класичната дефиниција на врoјатност.
- Условна веројатност, формула за множење на веројатности.
- Тотална веројатност, Бејзови формули.
- Независност на настани, независност во целина
- Условна независност

4. Независни испитувања

- Бернулиева шема

n – независни испитувања, A∈ $\mathcal{F}$, p = P(A)

Bk – настанот A се реализирал точно k пати во n-те испитувања

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n. \tag{6.4}$$

Пример 6.1. Гаѓање во мета. Стрелец гаѓа во мета и ја погодува истата со веројатност 0,7. Да ја најдеме веројатноста да во 10 гаѓања на метата,
а) стрелецот ја погоди метатата точно 5 пати,
б) стрелецот ја погоди метатата барем еднаш?

4. Независни испитувања

- Полиномна шема

n – независни испитувања, $A_1, A_2, \dots, A_r \in \mathcal{F}$ е разбивање на Ω, $p_i = P(A_i)$

$B_{k_1,k_2,\dots,k_r}$ – настаните $A_1, A_2, \dots, A_r$ се реализирале точно $k_1,k_2,\dots,k_r$ пати соодветно во n-те испитувања, $i=1,2,\dots,r$, $k_1+k_2+\dots+k_r=n$

$$p_n(k_1, k_2, ..., k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}, k_1 + k_2 + ... + k_r = n. \qquad (6.5)$$