ОСНОВИ НА ВЕРОЈАТНОСТ & ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА

III. ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Проф. д-р Ирена Стојковска,
Институт за математика,
Природно-математички факултет,
УКИМ, Скопје

E-mail: irena.stojkovska@gmail.com

1. Дефиниција на случајна променлива

- Не секогаш нè интересираат сите настани при еден експеримент, туку само одредени настани кои ни помагаат да опишеме одредено својство или карактериатика.
- **Пример:** 10 фрлања на коцка, $\Omega=\{w=(x1,\ldots,x10) \mid xi \in \{1,2,3,4,5,6\}, i=1,\ldots,10\}$
Разгледуваме број на паднати шестки, $\Omega'=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,
Дефнираме функција $X: \Omega \to \Omega'$ со
$X(w)=k$, ако елементарниот настан $w=(x1,\ldots,x10)$ е составен од точно k шестки
X – број на паднати шестки во 10 фрлања на коцка

Дефиниција 7.1. Нека е даден просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Функцијата $X : \Omega \to \mathbb{R}$ се нарекува **случајна променлива**, ако е мерлива во однос на σ-алгебрите $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ т.е. за секое Борелово множество $B \in \mathcal{B}$ важи

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}. \tag{7.1}$$

1.Дефиниција на случајна променлива

Дефиниција 7.1а. Функција $X : \Omega \to \mathbb{R}$ се нарекува **случајна променлива**, ако за секој $x \in \mathbb{R}$,

$$\{X \in (-\infty, x]\} = \{X \leq x\} = \{w : X(w) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}. \qquad (7.2)$$

Пример 7.1. Индикатор на настан. Нека $A \in \mathcal{F}$ е фиксен настан. Дефинираме случајна променлива

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \qquad (7.3)$$

која покажува дали настанот A се реализирал (прима вредност 1) или не се реализирал (прима вредност 0) и се нарекува **индикатор на настан** A или **Бернулиева случајна променлива**.

1. Дефиниција на случајна променлива

Пример 7.2. Број на паднати грбови. Монета се фрла три пати и секој пат се забележува 1 за паднат "грб" или 0 за падната "пара". Тогаш, просторот елементарни настани е $\Omega = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,0,0,),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)\}$. Дефинираме случајна променлива X: "број на паднати грбови" со $X((x_1,x_2,x_3)) = x_1 + x_2 + x_3$, за $(x_1,x_2,x_3) \in \Omega$. Не е тешко да се најде минималната σ-алгебра $\sigma(X)$ над која вака дефинираното пресликување X е случајна променлива (со помош на Дефиницијата 7.1а).

2. Случајна променлива од дискретен тип

- Случајната променлива X дефинирана над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ велиме дека е **дискретна случајна променлива**, ако множеството вредности X(Ω) е конечно или најмногу преброво.

Пример 7.3. Број на фрлања. Монета се фрла се додека не се падне "грб". При секое фрлање се забележува 1 за паднат "грб" или 0 за падната "пара". Тогаш, просторот елементарни настани е $\Omega = \{(1), (0,1), (0,0,1), (0,0,0,1), ...\}$. Дефинираме случајна променлива X: "број на фрлања" со $X((x_1, x_2, ..., x_n)) = n$, за $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$. Тогаш, X е дискретна случајна променлива со пребројиво множество вредности $X(\Omega) = \{1, 2, ..., n, ...\}$.

2. Случајна променлива од дискретен тип

- Секоја дискретна случајна променлива може да се претстави како линеарна комбинација од Бернулиеви случајни променливи.

Лема 7.1. *Нека X дискретна случајна променлива дефинирана над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ која прима конечно или преброиво многу вредности $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Тогаш, постои разбивање $A_k \in \mathcal{F}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ на Ω, така да*

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_{A_k}(\omega), \text{ за секој } \omega \in \Omega.$$

2. Случајна променлива од дискретен тип

Доколку со p_k ја означиме веројатноста на настанот да дискретната случајна променлива X прима вредност x_k т.е.

$$p_k = P\{X = x_k\} = P\{\omega | X(\omega) = x_k\}, \tag{7.4}$$

тогаш, велиме дека со (7.4) е даден **законот на распределба на веројатности** на случајната променлива X. Тогаш, за произволно Борелово множество $B \in \mathcal{B}$, имаме

$$P\{X \in B\} = P\{w | X(w) \in B\} = \sum_{k: x_k \in B} p_k.$$

Последната сума е добро дефинирана заради аксиомата за нормализираност, од каде добиваме дека $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

2. Случајна променлива од дискретен тип

Пример 7.4. Најчесто среќавани дискретни распределби.

а) Бернулиева распредеба

$$P\{I_A = 0\} = P\{\omega|\omega \notin A\} = 1 - P\{\omega|\omega \in A\} = 1 - P(A) = 1 - p,$$
$$P\{I_A = 1\} = P\{\omega|\omega \in A\} = P(A) = p.$$

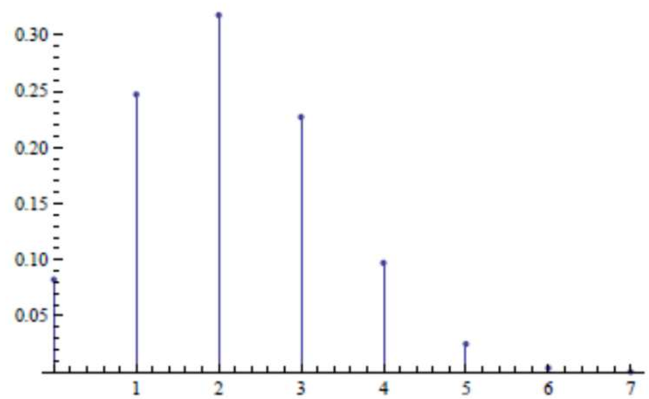
б) Рамномерна дискретна распределба на {x1, x2, …,xN}

$$P\{X = x_k\} = \frac{1}{N},\ k = 1, 2, ..., N.$$

2. Случајна променлива од дискретен тип

в) Биномна распредеба – B(n,p)

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,...,n.$$

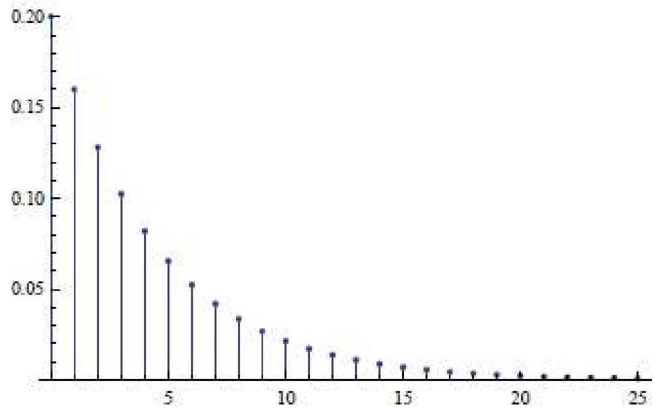


Слика 1.1: Биномна распределба $\mathcal{B}(7;0,3)$

2. Случајна променлива од дискретен тип

г) Геометриска распределба

$$P\{X = k\} = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$



Слика 1.3: Геометриска распределба $Geo(0, 2)$

2. Случајна променлива од дискретен тип

д) Пуасонова распредеба – P(λ), λ>0

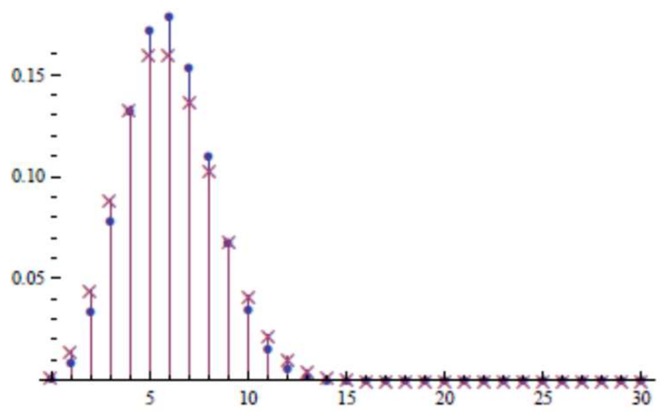
$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,...,$$

Пуасоновата распределба е апроксимација на биномната распределба за големи вредности на n и мали вредности на p, т.е.

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ \text{кога}\ n\to\infty, p\to 0, np\to\lambda.$$

2. Случајна променлива од дискретен тип

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \text{ кога } n \to \infty, p \to 0, np \to \lambda.$$



Слика 1.2: Биномна распределба $\mathcal{B}(30; 0,2)$ (кругчиња) и Поасонова распределба $\mathcal{P}(6)$ (крстчиња)

2. Случајна променлива од дискретен тип

Теорема 7.5. *Нека X е случајна променлива дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Тогаш, и пресликувањето $f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ е случајна променлива.*

Пример 7.5. Нека X е случајна променлива со биномна распределба $\mathcal{B}(n,p)$ т.е. $P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, ..., n$. Нека $Y = X + b$. Тогаш, распределбата на веројатности на Y е

$$\begin{aligned} P\{Y = m\} &= P\{X + b = m\} = P\{X = m - b\} = \\ &= \binom{n}{m-b} p^{m-b} (1-p)^{n-m+b}, \; m = b, b+1, ..., b+n. \end{aligned}$$

Резиме (II.4, III.1-2)

- Независни испитувања
  - Бернулиева шема
  - Полиномна шема
- Дефиниција на случајна променлива
- Случајна променлива од дискретен тип
- Закон на распределба на случајна променлива од дискретен тип
- Најчесто среќавани дискретни распределби
  - Бернулиева распределба (Индикатор на настан)
  - Рамномерна распределба на конечно множество
  - Биномна распределба
  - Геометриска распределба
  - Пуасонова распределба

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Пример 8.1. Нека X е дискретна случајна променлива која ги прима вредностите $x_1, x_2, ..., x_n$ со веројатности $p_1, p_2, ..., p_n$ соодветно. Замислете дека $p_1, p_2, ..., p_n$ се маси кои се закачени во точките $x_1, x_2, ..., x_n$ на една доволно долга (бестежинска) греда. Да претпоставиме дека сакаме да ја поставиме гредата во рамнотежа потпирајќи ја на потпорна точка поставена во точката μ, тогаш силата со која масата p_i поставена во точката x_i делува надолу е пропорционална со $p_i|x_i - \mu|$. Па, за да гредата биде во рамнотежа кога потпорната точка поставена во точката μ, треба

$$\sum_{x_i<\mu} p_i|x_i - \mu| = \sum_{x_i>\mu} p_i|x_i - \mu|,$$

односно

$$\sum_{x_i<\mu} p_i(\mu - x_i) = \sum_{x_i>\mu} p_i(x_i - \mu),$$

од каде за μ се добива

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i P\{X = x_i\}. \tag{8.1}$$

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Дефиниција 8.1. Нека $X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_{A_k}$ е дискретна случајна променлива која прима ненегативни вредности $x_1, x_2, ...,$ и каде $A_1, A_2, ...$ е разбивање на Ω. Тогаш, **математичко очекување** на случајната променлива X се дефинира како

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(A_k). \tag{8.2}$$

Ако редот на десната страна од равенството (8.2) конвергира, тогаш математичкото очекување на случајната променлива X е конечно, а во спротивно земаме дека $EX = +\infty$.

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Лема 8.1. *Математичкото очекување на ненегативна дискретна случајна променлива не зависи од разбивањето на Ω од дефиницијата на дискретната случајна променлива.*

Лема 8.2. *Нека X е ненегативна дискретна случајна променлива. Тогаш,*

(i) $E(cX) = cEX$, *за секој ненегативен реален број c,*

(ii) *ако A и B се дисјунктни настани, тогаш* $E(XI_{A\cup B}) = E(XI_A) + E(XI_B)$.

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Лема 8.3. *Нека X и Y се ненегативни дискретни случајни променливи. Тогаш,*

(i) $E(X+Y) = EX + EY$,

(ii) *ако* $X \leq Y$, *тогаш* $EX \leq EY$.

Лема 8.4. *Нека X е дискретна случајна променлива која прима ненегативни вредности $x_1, x_2, \ldots$ и нека $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција која прима само ненегативни вредности. Тогаш,*

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) P\{X = x_k\}.$$

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Дефиниција 8.2. Нека X е дискретна случајна променлива. Ги означуваме со X^+ и X^- случајните променливи дефинирани со

$$X^+ = \max\{X, 0\},\ X^- = \max\{-X, 0\}.$$

Тогаш, X^+ и X^- се ненегативни дискретни случајни променливи и за нив се дефинирани математичките очекувања $E(X^+)$ и $E(X^-)$. Ако барем едно од математичките очекувања $E(X^+)$ и $E(X^-)$ е конечно, тогаш го дефинираме **математичкото очекување** на случајната променлива X со

$$EX = E(X^+) - E(X^-).$$

Ако $E(X^+) = E(X^-) = \infty$, тогаш велиме дека не постои матемтичкото очекување на случајната променлива X.

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Последица 8.1. *Нека X е дискретна случајна променлива која ги прима вредностите $x_1, x_2, \ldots$ со веројатности $p_1, p_2, \ldots$ соодветно, т.е. $P\{X = x_i\} = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогаш, математичкото очекување на X, ако постои, е еднакво на*

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

- Пример за дискретна случајна променлива за која не постои математичкото очекување.

Пример 8.2. Математичко очекување на Бернулиева случајана променлива. Нека случајната променлива X има Бернулиева распределба т.е.

$$P\{X = 0\} = 1 - p, \; P\{X = 1\} = p,$$

каде $0 < p < 1$. Тогаш, математичкото очекување на X е

$$EX = 0 \cdot P\{X = 0\} + 1 \cdot P\{X = 1\} = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Пример 8.3. Математичко очекување на биномна случајана променлива. Нека X е случајна промелива со биномна распрделба т.е.

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n,$$

каде $n \in \mathbb{N}$ и $0 < p < 1$. Тогаш, математичкото очекување на X е $E(X) = np$.

Пример 8.4. Математичко очекување на Поасонова случајана променлива. Нека X има Поасонова распределба дадена со законот на распределба

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, ...,$$

каде $\lambda > 0$. Тогаш, нејзиното математичко очекување е $E(X) = \lambda$.

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Дефиниција 8.3. Нека X е дискретна случајна променлива. Математичките очекувања на случајните променливи X^n и $(X-EX)^n$, ако постојат, ги нарекуваме **n-ти момент** и **n-ти централен момент** на случајната променлива X соодветно. Вториот централен момент $E((X-EX)^2)$ се нарекува **дисперзија** на случајната променлива X и се означува со DX, или σ_X^2 или $Var(X)$ (од името **варијанса**).

Дисперзијата е мерка за распространување на X околу своето математичко очекување. Друга мерка за распространување на X е **стандардната девијација** на X која се дефинира како $\sigma_X = \sqrt{DX}$.

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Лема 8.5. *Нека X е дискретна случајна променлива. Тогаш,*

(i) $DX = E(X^2) - (EX)^2$,

(ii) $DX \geq 0$ *и* $DX = 0$ *ако и само ако постои константа c така да* $P\{X = c\} = 1$,

(iii) $D(cX) = c^2 DX$ *и* $D(X + c) = DX$ *за секој реален број c.*

Пример 8.6. Дисперзија на Бернулиева случајана променлива. Нека X е Бернулиева случајна променлива со распределба дадена во Пример 8.2, од каде имаме дека $EX = p$. За вториот момент на X имаме

$$E(X^2) = 0^2 \cdot P\{X = 0\} + 1^2 \cdot P\{X = 1\} = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p,$$

од каде за дисперзијата имаме

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

3. Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Пример 8.7. Дисперзија на биномна случајана променлива. Нека X има биномна распределба $\mathcal{B}(n,p)$ дадена во Пример 8.3, од каде $EX = np$. За вториот момент на X имаме $E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$.

Тогаш, дисперзијата на X е

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np((n-1)p + 1 - np) = np(1-p).$$

Пример 8.8. Дисперзија на Поасонова случајана променлива. Нека X има Поасонова распределба $\mathcal{P}(\lambda)$ дадена во Пример 8.4, од каде $EX = \lambda$. За вториот момент на X имаме $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$.

од каде за дисперзијата имаме

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

4. Случајни вектори

Дефиниција 9.1. Нека е даден просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Функцијата $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ се нарекува n-**димензионална случајна променлива** или **случаен вектор**, ако е за секое Борелово множество $B \in \mathcal{B}^n$ важи

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}. \tag{9.1}$$

Теорема 9.1. а) Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се (еднодимензионални) случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш, $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е n-димензионална случајна променлива.

б) Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е n-димензионална случајна променлива дефинирана над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш, $X_1, X_2, ..., X_n$ се случајни променливи.

4.1. Случајни вектори од дискретен тип

Закон на распределба на веројатности на случајниот вектор (X,Y)

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},\ i = 1, 2, ...,\ j = 1, 2, ... \qquad (9.2)$$

За произволно множество $B \in \mathcal{B}^2$, имаме

$$P\{(X,Y) \in B\} = P\{w|(X(w), Y(w)) \in B\} = \sum_{(i,j):(x_i,y_j)\in B} p_{ij}.$$

Тогаш, од аксиомата за нормализираност имаме

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

4.1. Случајни вектори од дискретен тип

Маргинални распределби на веројатности на X и Y:

$$P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij} = q_i, \; i = 1, 2, ..., \tag{9.3}$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} = r_j, \; j = 1, 2, ..., \tag{9.4}$$

Условни распределби на веројатности на X и Y при услов Y=yj и X=xi.

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}, \; i = 1, 2, ..., \tag{9.5}$$

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}}, \; j = 1, 2, ... \tag{9.6}$$

4.1. Случајни вектори од дискретен тип

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	Σ
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	q_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	q_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Σ	r_1	r_2	$\cdots$	r_j	$\cdots$	1

Пример 9.1. Фер монета се фрла еднаш. Ако падне "грб", се фрла уште еднаш. Нека X е број на паднати "грба" и Y е број на фрлања. Најди ја распределбата на случајниот вектор (X,Y). Најди ги маргиналните и условните распределби. Најди ја веројатноста дека се паднал најмалку еден "грб".

4.1. Случајни вектори од дискретен тип

Теорема 9.4. *Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Тогаш, и пресликувањето $f(X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ е случајна променлива.*

Лема 9.1. *Нека X и Y се дискретни случајни променливи со заеднички закон на распределба $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$, $i, j = 1, 2, ...$ и нека $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Тогаш,*

$$E(g(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\}.$$

4.1. Случајни вектори од дискретен тип

Пример 9.2. За случајниот вектор (X, Y) од Пример 9.1, најди ги распределбите на случајните променливи $U = \min\{X, Y\}$, $V = \max\{X, Y\}$, $S = X + Y$ и $T = XY$. Најди ги нивните математички очекувања.

- **Пример.**

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$a/3$	$a/3$	$1/36$
1	$2/9$	$2/9$	$a/6$
2	$1/9$	$a/3$	$a/12$

а) Определи ја вредноста на $a \in \mathbb{R}$.

б) Најди ги маргиналните закони на распределба на X и Y.

в) Најди ја условната распределба на X при услов $Y = 0$ и условната распределба на Y при услов $X = 1$.

г) Најди ги веројатностите $P\{X = 1, Y < 1\}$, $P\{X < 2, Y > 1\}$ и $P\{X < 0, Y > 0\}$.

Резиме (III.3-4)

- Математичко очекување на дискретна случајна променлива
  - интерпретација на математичкото очекување
  - дефниција на математичко очекување на ненегативна дискретна случајна променлива (добра дефинираност)
  - дефниција на математичко очекување на произволна дискретна случајна променлива
  - пример за дискретна случајна променлива со $EX = +\infty$
  - математичко очекување на некои поважни дискретни случајни променливи
  - својства на математичкото очекување
  - k-момент, k-ти централен момент, дисперзија, стандардна девијација
  - својства на дисперзијата
- Случајни вектори
  - дефиниција, врска меѓу случајни променливи и случаен вектор
  - случаен вектор од дискретен тип, закон на распределба на случаен вектор, маргинални закони на распределба, условни закони на распределба

5. Независност на случајни променливи

Дефиниција 9.2. Случајните променливи $\{X_j : \Omega \to \mathbb{R} | j \in \mathcal{J}\}$ дефинирани на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ се **независни (во целост)**, ако за секој $k \geq 2$, секоја k-торка индекси $(j_1, j_2, ..., j_k)$ од $\mathcal{J}$ и секоја k-торка $(B_1, B_2, ..., B_k)$ од Борелови множества над $\mathbb{R}$ важи

$$P(\bigcap_{i=1}^{k}\{X_{j_i} \in B_i\}) = \prod_{i=1}^{k} P\{X_{j_i} \in B_i\}.$$

Теорема 9.5. *Нека X и Y се дискретни случајни променливи. Тогаш, X и Y се независни ако и само ако за секој пар (x_i, y_j) од множеството вредности на случајниот вектор (X, Y) важи*

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}, \ i, j = 1, 2, ...$$

5. Независност на случајни променливи

Теорема 9.6. *Нека X и Y се независни дискретни случајни променливи. Тогаш,*

$$E(XY) = EX \cdot EY.$$

Теорема 9.7. *Нека X и Y се независни дискретни случајни променливи. Тогаш,*

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

Лема 9.2. *Ако X и Y се независни дискретни случајни променливи, тогаш*

$$D(XY) \geq DX \cdot DY.$$

Пример 9.3. Провери ја независноста на случајните променливи X и Y од Пример 9.1.

5. Независност на случајни променливи

Пример 9.4. Проценка на веројатности со симулации.

Се генерираат n независни експерименти. Во m од нив се реализира настанот A, тогаш веројатноста p=P(A) се апроксимира со m/n.

Да ја увидиме прецизноста на постапката. Дефинираме Бернулиеви сучајни променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Тогаш, случајната променлива X е оценка за P(A),

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

$$EX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(A) = P(A),$$

$$DX = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} P(A)(1-P(A)) = \frac{1}{n}P(A)(1-P(A)),$$

6. Коефициент на корелација

Дефиниција 9.3. Нека X и Y се дискретни случајни променливи со конечни втори моменти $E(X^2)$ и $E(Y^2)$ соодветно. **Коваријанса** меѓу случајните променливи X и Y е

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY) - EX \cdot EY. \tag{9.8}$$

Лема 9.3. *Нека X и Y се дискретни случајни променливи со конечни втори моменти $E(X^2)$ и $E(Y^2)$ соодветно. Тогаш,*

$$\operatorname{cov}(aX+b, cY+d) = ac\operatorname{cov}(X,Y),$$

за произволни константи $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

6. Коефициент на корелација

Лема 9.4. *Нека X и Y се дискретни случајни променливи со конечни втори моменти $E(X^2)$ и $E(Y^2)$ соодветно. Ако X и Y се независни, тогаш* $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

Пример 9.5. Нека X има распределба

$$P\{X=-1\} = \frac{1}{4}, P\{X=0\} = \frac{1}{2}, P\{X=1\} = \frac{1}{4}.$$

Нека $Y = X^2$. Тогаш, $EX = 0$, $E(XY) = E(X^3) = 0$, па $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$. Но,

$$P\{X=-1, Y=0\} = P\{X=-1, X^2=0\} = 0 \neq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = P\{X=-1\}P\{Y=0\},$$

што значи дека X и Y не се независни случајни променливи.

Лема 9.5. *Нека X и Y се дискретни случајни променливи со конечни втори моменти $E(X^2)$ и $E(Y^2)$ соодветно. Тогаш,*

$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

6. Коефициент на корелација

Дефиниција 9.4. Нека X и Y се дискретни случајни променливи со конечни и позитивни дисперзии DX и DY соодветно. **Коефициент на корелација** меѓу случајните променливи X и Y е

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}. \tag{9.9}$$

Важат слични тврдења на тврдењата Лема 9.3 и Лема 9.4, и за коефициентот на корелација.

Лема 9.6. *Нека X и Y се дискретни случајни променливи со конечни и позитивни дисперзии DX и DY соодветно. Тогаш,*

$$\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X,Y),$$

за произволни константи $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

6. Коефициент на корелација

Лема 9.7. *Нека X и Y се дискретни случајни променливи со конечни и позитивни дисперзии DX и DY соодветно. Ако X и Y се независни, тогаш $\rho(X,Y) = 0$.*

Теорема 9.8. *Нека X и Y се дискретни случајни променливи со конечни и позитивни дисперзии DX и DY соодветно. За коефициентот на корелација на X и Y важи $|\rho(X,Y)| \leq 1$. При тоа равенство важи ако и само ако зависноста меѓу X и Y е линеарна.*

Пример 9.6. Најди го коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y од Пример 9.1.