ОСНОВИ НА ВЕРОЈАТНОСТ & ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА

IV. ОПШТИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Проф. д-р Ирена Стојковска,
Институт за математика,
Природно-математички факултет,
УКИМ, Скопје

E-mail: irena.stojkovska@gmail.com

1. Функција на распределба

Дефиниција 10.1. Нека е дадена случајна променлива $X : \Omega \to \mathbb{R}$ над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш, функцијата $P_X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\} = P(X^{-1}(B)), \tag{10.1}$$

се нарекува **распределба на веројатности** на случајната променлива X.

Дефиниција 10.2. Нека е дадена случајна променлива $X : \Omega \to \mathbb{R}$ над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш, функцијата $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P\{\omega : X(\omega) \le x\} = P\{X \le x\}, \tag{10.2}$$

се нарекува **функција на распределба** на случајната променлива X.

1. Функција на распределба

Теорема 10.1. *Нека $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција на распределба на случајанта променлива X. Тогаш, важат следните својства*

(F1) *F е растечка функција,*

(F2) *F е непрекината од десно,*

(F3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *и* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Пример 10.1. Функција на распределба на рамномерна дискретна случајна променлива.

1. Функција на распределба

Теорема 10.2. *Нека $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција која ги задоволува условите* (F1)-(F3) *од Теорема 10.1. Тогаш, постои единствена веројатносна мера P дефинирана над $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, така да*

$$F(x) = P((-\infty, x]).$$

Својство 10.1. *Нека F е функција на распределба на случај*
Тогаш, за секои реални броеви $a < b$ важи

(а) $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$,

(б) $P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a-)$,

(в) $P\{a \leq X < b\} = F(b-) - F(a-)$,

(г) $P\{a < X < b\} = F(b-) - F(a)$,

(д) $P\{X = a\} = F(a) - F(a-)$ *и*
ако F е непрекината во $x = a$, тогаш $P\{X = a\} = 0$.

1. Функција на распределба

Пример 10.2. Нека е дадена функцијата

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , 0 \leq x < 0.25 \\ 0.5 & , 0.25 \leq x < 0.5 \\ -2(x-1)^2 + 1 & , 0.5 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} .$$

Функцијата F ги задоволува условите (F1)-(F3) од Теорема 10.1, тогаш, според Теорема 10.2, таа е функција на распределба на некоја случајна променлива X и со F во потполност е определена распределбата на веројатности на X. Така, може да се најде дека $P\{X = 0.25\} = 0.25$, $P\{X = x_0\} = 0$ за секој $x_0 \neq 0.25$, $P\{X \in (0.25, 0.5]\} = 0$, $P\{X \in (0.8, 1]\} = F(1) - F(0.8) = 1 - 0.92 = 0.08$ и слично.

1. Функција на распределба

Дефиниција 10.3. Нека $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција која ги задоволува условите (F1)-(F3) од Теорема 10.1.

(а) Ако постојат реални и меѓусебно различни броеви $x_1, x_2, ...$, и ненегативни броеви $p_1, p_2, ...$ така да важи $p_1 + p_2 + ... = 1$ и при тоа за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$F(x) = \sum_{\{k | x_k \leq x\}} p_k, \tag{10.3}$$

тогаш функцијата F се нарекува **дискретна функција на распределба.**

(б) Ако F е непрекината функција и постои ненегативна функција $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, така да за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\, du, \tag{10.4}$$

тогаш функцијата F се нарекува **апсолутно непрекината функција на распределба.**

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

Својство 10.2. *Нека X е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип, со функција на распределба $F(x)$ и густина на распределба $p(x)$. Тогаш,*

(а) $p(x) \geq 0$, *за секој* $x \in \mathbb{R}$,

(б) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\, du$, *за секој* $x \in \mathbb{R}$,

(в) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$,

(г) $F'(x) = p(x)$ *во точките на непрекинатост на* $p(x)$,

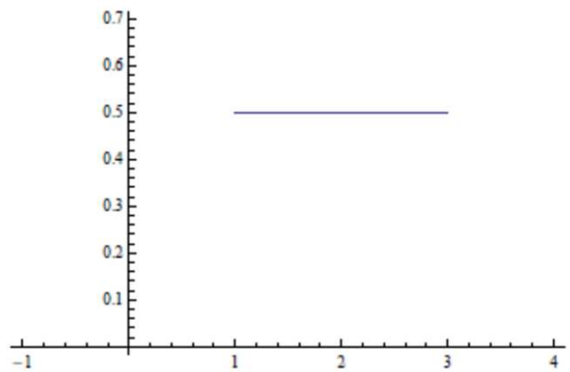
(д) $P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} p(x)\, dx = F(b) - F(a)$, *за секои* $a < b$.

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

Пример 10.4. а) **Рамномерна распределба.** Нека густината на распределба на случајната променлива X е дадена со

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a,b] \\ 0 & , x \notin [a,b] \end{cases} , \tag{10.5}$$

тогаш X има рамномерна распределба на интервалот $[a, b]$, ознака $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.



Слика 1.4: Рамномерна распределба $\mathcal{U}(1, 3)$

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

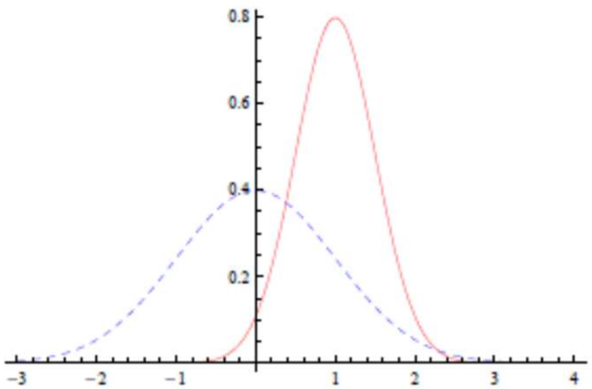
б) **Нормална распределба.** Ако густината на распределба на случајната променлива X е дадена со

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}, \tag{10.6}$$

тогаш X има нормална распределба со параметри m и σ^2 ($\sigma > 0$), ознака $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. (цртеж!) Нормалната распределба со параметри 0 и 1 се нарекува **стандардна нормална распределба**, ознака $\mathcal{N}(0, 1)$, и има густина на распределба

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}. \tag{10.7}$$

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип



N(1, 0.5^2) – црвена полна линија
N(0,1) – сина испрекината линија

Заради големото значење и примена на нормалната распределба, се изработуваат таблици за читање на вредности на функциите

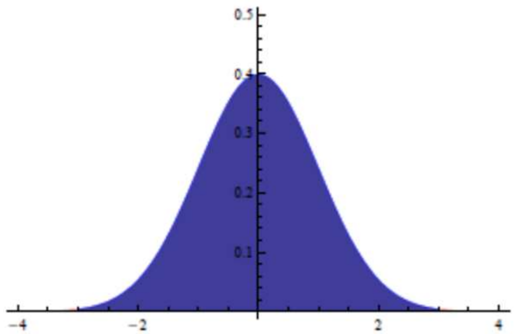
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}},\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \text{ и } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

Својство 1.4. *Ако случајната променлива* X *има* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *распределба, тогаш случајната променлива* $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *има* $\mathcal{N}(0,1)$ *распределба.*

Својство 1.5. *За случајната променлива* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *важи* **правилото на три сигми**, *односно*

$$P\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\} = 0,9973 = 99,7\%.$$



(б)

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

в) **Гама распределба.** Густината на распределба на случајанта променлива X која има Гама распределба со параметри α и λ $(\alpha, \lambda > 0)$, е дадена со

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} , \qquad (10.8)$$

каде $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-t} dt$ е Гама функција. Јасно е дека $p(x) \geq 0$. Додека $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$ следува од

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \lambda^{-\alpha} \lim_{b \to +\infty} \int_0^{\lambda b} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \lambda^{-\alpha}\Gamma(\alpha).$$

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

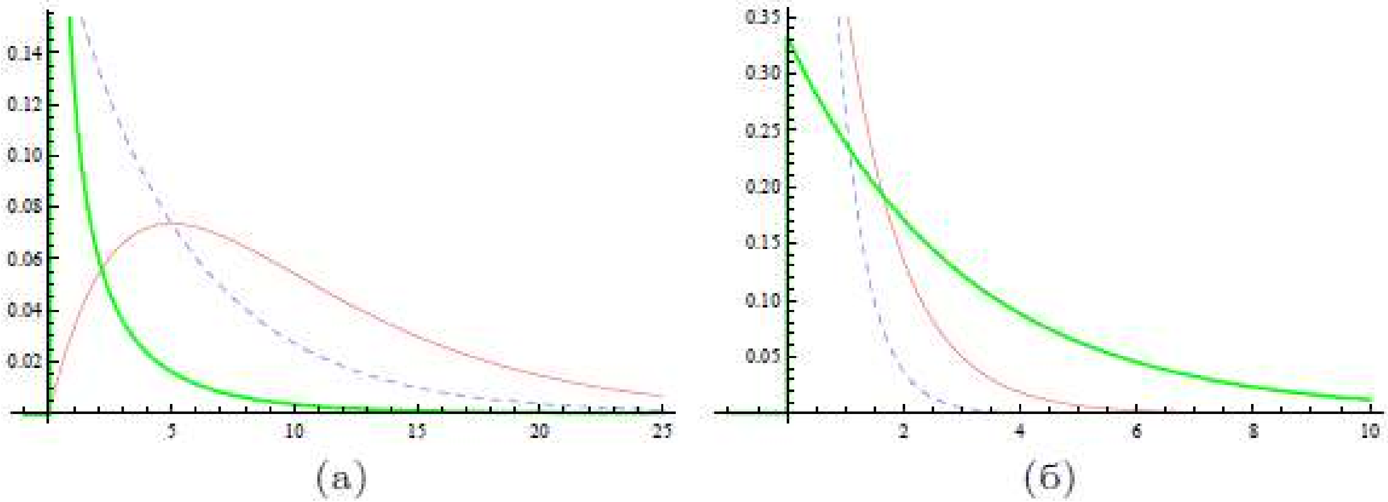
г) **Експоненцијална распределба.** Гама распределба за $\alpha = 1$ се нарекува експоненцијална распределба со параметар λ ($\lambda > 0$), ознака $\mathcal{E}(\lambda)$. Тогаш, густината на распределба е

$$p(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} . \tag{10.9}$$

д) **Хи-квадрат распределба.** Гама распределба за $\alpha = \frac{n}{2}$ и $\lambda = \frac{1}{2}$, каде $n \in \mathbb{N}$ се нарекува хи-квадрат распределба со n степени на слобода, ознака χ^2_n. Тогаш, густината на распределба е

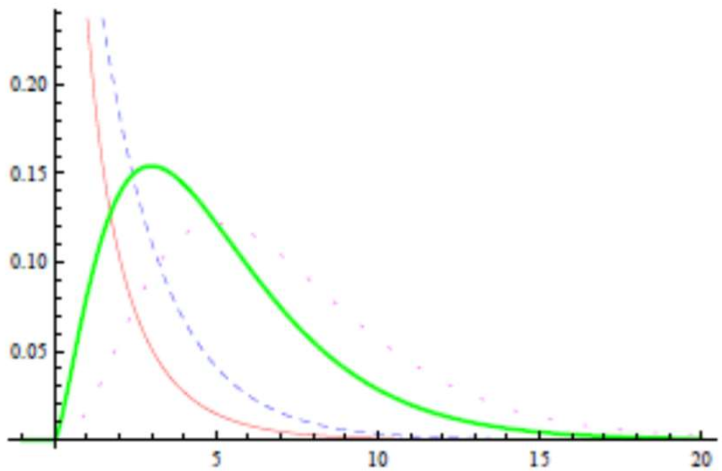
$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\, e^{-x/2} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} . \tag{10.10}$$

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип



Слика 1.6: (а) Гама распределба $\Gamma(2,5)$ (црвена тенка линија), $\Gamma(1,5)$ (сина испрекината линија) и $\Gamma(0.2,5)$ (зелена дебела линија), (б) Експоненцијална распределба $\mathcal{E}(1)$ (црвена тенка линија), $\mathcal{E}(0.5)$ (сина испрекината линија) и $\mathcal{E}(3)$ (зелена дебела линија)

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип



Слика 1.7: Хи-квадрат распределба χ^2_n, за $n = 1$ (црвена тенка линија), за $n = 2$ (сина испрекината линија), за $n = 5$ (зелена дебела линија) и за $n = 7$ (виолетова точкаста линија)

2. Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

ѓ) **Кошиева распределба.** Случајната променлива има Кошиева распределба со параметар α ($\alpha > 0$), ако густината на распределба е дадена со

$$p(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (10.11)$$

Резиме (III.5-6, IV.1-2)

- Независност на случајни променливи и својства на независни случајни променливи
- Коваријанса и коефициент на корелација на две случајни променливи и нивни својства
- Функција на распределба на случајна променлива и нејзини својства
- Видови случајни променливи. Случајна променлива од апсолутно непрекинат тип и својства на густината на распределба
- Позначајни распределби од апсолутно непрекинат тип: рамномерна распределба, нормална Гаусова распределба, Гама распределба, експоненцијална распределба, хи-квадрат распределба, Кошиева распределба

3. Случајни вектори од апсолутно непрекинат тип

Дефиниција 11.1. Нека е даден случајниот вектор $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ дефиниран над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш, функцијата $P_X : \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\} = P(X^{-1}(B)), \tag{11.1}$$

се нарекува **распределба на веројатности** на случајниот вектор X.

Дефиниција 11.2. Нека е даден случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ дефиниран над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш, функцијата $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_n \leq x_n\}, \tag{11.2}$$

се нарекува **функција на распределба** на случајниот вектор X.

3. Случајни вектори од апсолутно непрекинат тип

Теорема 11.1. *Нека $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е функција на распределба на случајаниот вектор X. Тогаш, важат следните својства*

(FV1) *F е растечка функција по секој аргумент,*

(FV2) *F е непрекината од десно по секој аргумент,*

(FV3) $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, *за секој $k = 1, 2, ..., n$ и*
$\lim\limits_{x_1 \to +\infty, ..., x_n \to +\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n) = 1.$

(FV4) $\Delta_F(I) \geq 0$ *за секој n-димензионален интервал I.*

Забелешка. Секој n-димензионален интервал $I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ... \times (a_n, b_n]$ има 2^n темиња од облик $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, каде $x_k = a_k$ или $x_k = b_k$. Дефинираме знак $z_I(x)$ на темето x со

$$z_I(x) = \begin{cases} +1 & \text{, ако бројот на индекси } k \text{ за кои } x_k = a_k \text{ е парен} \\ -1 & \text{, ако бројот на индекси } k \text{ за кои } x_k = a_k \text{ е непарен} \end{cases}$$

Тогаш, за функцијата $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинитраме

$$\Delta_F(I) = \sum_x z_I(x) F(x),$$

при што сумирањето е по сите темиња x на интервалот I.

3. Случајни вектори од апсолутно непрекинат тип

Теорема 11.2. *Нека $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е функција која ги задоволува условите* (FV1)-(FV4) *од Теорема 11.1. Тогаш, постои единствена веројатносна мера P дефинирана над $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, така да*

$$F(x_1, ..., x_n) = P((-\infty, x_1] \times ... \times (-\infty, x_n]).$$

При тоа, за секој n-димензионален интервал I важи $P(I) = \Delta_F(I)$.

Ако функцијата на распределба F на случајниот вектор X е апсолутно непрекината, т.е. ако постои ненегативна функција $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, така да за секој $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ важи

$$F(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, ..., u_n)\, du_1 ... du_n,$$

тогаш случајниот вектор X е од **апсолутно непрекинат тип**, а p е **густина на распределба** на случајниот вектор X.

3. Случајни вектори од апсолутно непрекинат тип

Својство 11.1. *Нека X е случаен вектор од апсолутно непрекинат тип, со функција на распределба $F(x)$ и густина на распределба $p(x)$. Тогаш,*

(а) $p(x) \geq 0$, *за секој* $x \in \mathbb{R}^n$,

(б) $F(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, ..., u_n)\, du_1...du_n,$, *за секој* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

(в) $\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, ..., x_n)\, dx_1...dx_n = 1$,

(г) $\frac{\partial^n F(x_1,...,x_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = p(x)$ *во точките на непрекинатост на* $p(x)$,

(д) $P\{X \in B\} = \int_B p(x)\, dx$, *за секое* $B \in \mathcal{B}^n$.

3. Случајни вектори од апсолутно непрекинат тип

Маргиналните густини на распределба на случајните променливи X и Y дадени се со

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy \text{ и } p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx$$

соодветно.

Забелешка. Во случај на n-димензионален случаен вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ со густина на распределба $p(x_1, x_2, ..., x_n)$, се дефинира **маргинална густина на распределба** за секој вектор $(X_{j_1}, X_{j_2}, ..., X_{j_k})$, каде $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$, $k < n$ со

$$p(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k}) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} p(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_{j_1} dx_{j_2} ... dx_{j_k}.$$

Интегралот во Забелешката треба да биде по сите останати n-k променливи, кога од променливите x1, x2, …, xn ќе се отстранат променливите xj1, xj2, …, xjk.

3. Случајни вектори од апсолутно непрекинат тип

Пример 11.1. Дводимензионална рамномерна распределба. За областа $B \in \mathcal{B}^2$ дефинираме апсолутно непрекинат случаен вектор (X, Y) со **рамномерна распределба** над областа B со

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(B)} & ,(x,y) \in B \\ 0 & ,(x,y) \notin B \end{cases},$$

каде $m(B)$ е дводомензионален волумен (плоштина) на областа B.

Пример 11.2. Дводимензионална нормална распределба. Ако густината на распределба на случајниот вектор (X, Y) е дадена со

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-m_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho\cdot\frac{x-m_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-m_2}{\sigma_2} + (\frac{y-m_2}{\sigma_2})^2]\},$$

за $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, тогаш (X, Y) има **нормална распределба** со параметри m_1, m_2, σ_1^2, σ_2^2, ρ $(\sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 \leq \rho \leq 1)$, ознака $(X, Y) \sim \mathcal{N}(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. Ако ја

3. Случајни вектори од апсолутно непрекинат тип

од каде **условната густина на распределба** на случајната променлива Y при услов $X = x$ е

$$p_{Y|X=x}(y) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}.$$

и **условната густина на распределба** на случајната променлива X при услов $Y = y$ е

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}.$$

Пример 11.3. Условна нормална распределба.

исто така во Пример 11.2. Тогаш, условната густина на распределба на Y при услов $X = x$ е

$$p_{Y|X=x}(y) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma_2^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}(y - m_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1))^2\},$$

што значи $(Y|X = x) \sim \mathcal{N}(m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1), (1-\rho^2)\sigma_2^2)$.

4. Независност на случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

Теорема 11.3. *Нека X и Y се случајни променливи со функции на распределба F_X и F_Y соодветно, и нека $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е функција на распределба на случајниот вектор (X, Y). Тогаш, X и Y се независни ако и само ако за секој пар $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ важи*

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Теорема 11.4. *Нека X и Y се случајни променливи од апсолутно непрекинат тип со густини на распределба p_X и p_Y соодветно, и нека $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е густина на распределба на случајниот вектор (X, Y). Тогаш, X и Y се независни ако и само ако за секој пар $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ скоро сигурно важи*

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

4. Независност на случајни променливи од апсолутно непрекинат тип

Пример 11.5. Независни нормално распределени случајни променливи. Во Пример 11.2 ја дадовме нормалната густина на распределба $p(x, y)$. Тогаш, според Теорема 11.4 имаме дека $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ и $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ се независни случајни променливи ако и само ако густината на распределба на (X, Y) е

$$\begin{aligned} p(x,y) &= p_X(x)p_Y(y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{x-m_1}{\sigma_1})^2\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{y-m_2}{\sigma_2})^2\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\{-\frac{1}{2}[(\frac{x-m_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{y-m_2}{\sigma_2})^2]\}, \end{aligned}$$

односно $(X, Y) \sim \mathcal{N}(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, 0)$.

5. Математичко очекување на општа случајна променлива

Математичкото очекување на призволна случајна променлива X над просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ќе го дефинираме како *Лебегов интеграл* на функцијата X по мерата P. Дефиницијата се дава во неколку етапи:

1) Најнапред се дефинира математичко очекување на ненегативна дискретна случајна променлива (дефинирано со Дефиниција 8.1).

2) Потоа се дефинира математичко очекување на произволна ненегативна случајна променлива (ќе го дефинираме во овој дел со Дефиниција 12.1).

3) На крај, се дефинира математичко очекување од произволна случајна променлива (дефиниција иста како Дефиниција 8.2, само што во услов наместо X дискретна случајна променлива, земаме дека X е произволна случајна променлива, види Дефиниција 12.2).

5. Математичко очекување на општа случајна променлива

Дефиниција 12.1. Нека X е произволна ненегативна случајна променлива и нека (X_n) е низа од ненегативни дискретни случајни променливи, така да $X_n(w) \uparrow X(w)$ кога $n \to \infty$ и при тоа конвергенцијата е рамномерна на Ω. Тогаш, **математичкото очекување** на случајната променлива X се дефинира со

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n). \tag{12.1}$$

Лема 12.1. *За секоја ненегативна случајна променлива X постои низа (X_n) од ненегативни дискретни случајни променливи, така да $X_n(w) \uparrow X(w)$ кога $n \to \infty$ и при тоа конвергенцијата е рамномерна на Ω.*

5. Математичко очекување на општа случајна променлива

Лема 12.2. *Граничната вредност (12.1) е конечен број или $+\infty$.*

Лема 12.3. *Граничната вредност (12.1) не зависи од изборот на низата (X_n).*

Лема 12.4. *Ако X е ненегативна дискретна случајна променлива, тогаш граничната вредност (12.1) е еднаква на збирот (8.2).*

5. Математичко очекување на општа случајна променлива

Дефиниција 12.2. Нека X е произволна случајна променлива. Ги означуваме со X^+ и X^- случајните променливи дефинирани со

$$X^+ = \max\{X, 0\},\ X^- = \max\{-X, 0\}.$$

Тогаш, X^+ и X^- се ненегативни случајни променливи и за нив се дефинирани математичките очекувања $E(X^+)$ и $E(X^-)$. Ако барем едно од математичките очекувања $E(X^+)$ и $E(X^-)$ е конечно, тогаш го дефинираме **математичкото очекување** на случајната променлива X со

$$EX = E(X^+) - E(X^-).$$

Ако $E(X^+) = E(X^-) = \infty$, тогаш велиме дека не постои математичкото очекување на случајната променлива X.

5. Математичко очекување на општа случајна променлива

Теорема 12.3. *Нека X е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип со функција на распределба $F(x)$ и густина на распределба $p(x)$ и нека $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Ако $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|p(x)dx < +\infty$, тогаш постои конечно математичко очекување на случајната променлива $g(X)$ и важи равенството*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx, \tag{12.6}$$

каде што интегралот (12.6) е несвојствен Риманов интеграл. Специјално за $g(x) = x$, равенсвото (12.6) преминува во

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx. \tag{12.7}$$

5. Математичко очекување на општа случајна променлива

Пример 12.1. Математичко очекување на рамномерна распределба. Нека $X \sim \mathcal{U}[a,b]$ т.е. густината на распределба е $p(x) = \frac{1}{b-a}$, за $a \leq x \leq b$. Тогаш, според Теорема 12.3, имаме дека

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\ \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

5. Математичко очекување на општа случајна променлива

Пример 12.2. Математичко очекување на нормална распределба. Нека $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ т.е. густината на распределба е $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, за $x \in \mathbb{R}$. Тогаш, имаме дека

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Ставаме смена $t = \frac{x-m}{\sigma}$, па

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + m) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = m,$$

5. Математичко очекување на општа случајна променлива

Пример 12.3. Математичко очекување на Кошиева распределба. Нека случајната променлива X има Кошиева распределба со густина на распределба $p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, за $x \in \mathbb{R}$. Тогаш, од

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) dx &= -\int_{-\infty}^{0} x \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty, \end{aligned}$$

па не постои математичкото оченување на случајната променлива X. Но, доволно е Кошиевата случајна променлива да ја ограничиме на $[0,1]$ за да постои математичкото очекување, односно дефинираме случајна променлива $Y = \min\{1, |X|\}$. Тогаш, $EY = \frac{1}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2}$ (покажи!).

Резиме (IV.3-5)

- Случајни вектори од апсолутно непрекинат тип и нивни својства.
- Независност на случајни променливи од апсолутно непрекинат тип
- Математичко очекување на општа случајна променлива, дефиниција и математичко очекување на позначајните случајни променливи

6. Својства на математичкото очекување

Својство 12.1. *Нека X и Y е произволни случајни променливи за кои постојат математичките очекувања. Тогаш,*

(i) $E(cX) = cEX$, *за секој реален број* c,

(ii) *ако* A *и* B *се дисјунктни настани, тогаш* $E(XI_{A\cup B}) = E(XI_A) + E(XI_B)$,

(iii) $E(X+Y) = EX + EY$,

(iv) *ако* $X \leq Y$, *тогаш важи* $EX \leq EY$,

(v) $|EX| \leq E|X|$,

(vi) EX *и* $E|X|$ *се истовремено конечни или не.*

6. Својства на математичкото очекување

Нека (X_n) е низа од случјани променливи дефинирани на ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и нека за секој $w \in \Omega$ важи $\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)$, што пократко се запишува како $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. Се поставува прашањето, при кои услови ќе важи равенството

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n). \tag{12.9}$$

Одговор ни даваат следните теореми.

6. Својства на математичкото очекување

Теорема 12.5 (Теорема за монотона конвергенција). *Нека X и Y се случајни променливи и нека (X_n) е низа од случјани променливи такви што:*

а) за секој $w \in \Omega$ важи $X_n(w) \uparrow X(w)$,

б) за секој n и $w \in \Omega$ важи $X_n(w) \geq Y(w)$,

в) важи $E(Y) > -\infty$

Тогаш, важи равенството (12.9).

6. Својства на математичкото очекување

Теорема 12.6 (**Лема на Фату.**). *Нека Y е случајна променлива и нека (X_n) е низа од случјани променливи такви што:*

а) за секој $w \in \Omega$ важи $X_n(w) \geq Y(w)$,

б) важи $E(Y) > -\infty$

Тогаш, важи неравенството

$$E(\varliminf_{n\to\infty} X_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} E(X_n). \tag{12.10}$$

6. Својства на математичкото очекување

Теорема 12.7 (Теорема на Лебег за доминантна конвергенција). *Нека X и Y се случајни променливи и нека (X_n) е низа од случјани променливи такви што:*

а) $E|Y| < +\infty$,

б) за секој n и $w \in \Omega$ важи $|X_n(w)| \geq Y(w)$,

а) за секој $w \in \Omega$ важи $\lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)$.

Тогаш, важи равенството (12.9).

6. Својства на математичкото очекување

Дефиниција 12.3. Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност и нека T е тврдење кое зависи од исходот $w \in \Omega$. Велиме дека тврдењето T **важи скоро сигурно** (**или важи со веројатност 1**), ако $P\{w : \text{важи тврдењето } T(w)\} = 1$.

Лема 12.5. *Нека X и Y се случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш, важат следните тврдења:*

i) Ако $X = Y$ скоро сигурно, тогаш $EX = EY$.

ii) Ако $X \leq Y$ скоро сигурно, тогаш $EX \leq EY$.

6. Својства на математичкото очекување

Теорема 12.8. *Нека X и Y се независни случајни променливи со конечни математички очекувања. Тогаш, случајната променлива XY има конечно математичко очекување и важи*

$$E(XY) = EX \cdot EY. \tag{12.11}$$

Обратно, ако случајната променлива XY има конечно математичко очекување и ниедна од независните случајни променливи X и Y не е еднаква на нула со веројатност 1, тогаш и случајните променливи X и Y имаат конечни математички очекувања.

6. Својства на математичкото очекување

Пример 12.4. Дисперзија на рамномерна распределба. Нека $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ т.е. густината на распределба е $p(x) = \frac{1}{b-a}$, за $a \leq x \leq b$. Тогаш, според Теорема 12.3, имаме дека

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Од Пример 12.1 имаме дека $EX = \frac{a+b}{2}$, па затоа

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

6. Својства на математичкото очекување

Пример 12.5. Дисперзија на нормална распределба. Нека $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ т.е. густината на распределба е $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, за $x \in \mathbb{R}$. Од Пример 12.2 имаме дека $EX = m$. Па затоа,

$$\begin{aligned} DX &= E(X - EX)^2 = E(X - m)^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

Ставаме смена $t = \frac{x-m}{\sigma}$, па

$$DX = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Повторно ставаме смена $u = \frac{t^2}{2}$, па

$$DX = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{3}{2}) = \sigma^2,$$

затоа што $\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\, \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\, \sqrt{\pi}$. Искористени се следните две својства на Гама функцијата $\Gamma(1 + \alpha) = \alpha\, \Gamma(\alpha)$, за $\alpha > 0$ и $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

6. Својства на математичкото очекување

Теорема 12.9 (Неравенство на Марков). *Нека X е случајна променлива која прима само ненегативни вредности. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ важи неравенството*

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{EX}{\varepsilon}. \tag{12.12}$$

Теорема 12.10 (Неравенство на Чебишев). *Нека X е произволна случајна променлива. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ важи неравенството*

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \tag{12.13}$$

6. Својства на математичкото очекување

Пример 12.6. Коефициент на корелација за нормално распределени случајни променливи. Нека е даден случајниот вектор $(X, Y) \sim \mathcal{N}(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, односно со густина на распределба

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-m_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho\cdot\frac{x-m_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-m_2}{\sigma_2} + (\frac{y-m_2}{\sigma_2})^2]\},$$

за $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, тогаш X и Y имат $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ распределби соодветно (види Пример 11.2), што значи дека $EX = m_1$, $EY = m_2$, $DX = \sigma_1^2$ и $DY = \sigma_2^2$ (види Пример 12.2 и Пример 12.5).

Сега, според (12.15), имаме дека

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)dxdy = \rho\sigma_1\sigma_2 + m_1m_2$$

(покажи!), од каде за коефициентот на корелација на X и Y имаме

$$\rho(X,Y) = \frac{E(XY) - EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 + m_1m_2 - m_1m_2}{\sigma_1\sigma_2} = \rho.$$

7. Условно математичко очекување

Дефиниција 13.1. Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е ненегативна случајна променлива. **Условно математичко очекување на случајната променлива** X **во однос на** σ**- под-алгебрата** $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ е ненегативната проширена случајна променлива[1] $E(X|\mathcal{A})$ која ги има следните својства

а) $E(X|\mathcal{A})$ е случајна променлива која е $\mathcal{A}$-мерлива,

б) за секој настан $A \in \mathcal{A}$ важи

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{A}) dP.$$

7. Условно математичко очекување

Дефиниција 13.2. Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е произволна случајна променлива. Ако $E(X^+|\mathcal{A}) < +\infty$ скоро сигурно или $E(X^-|\mathcal{A}) < +\infty$ скоро сигурно, тогаш **условно математичко очекување на случајната променлива** X **во однос на** σ**-подалгебрата** $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ е случајната променлива $E(X|\mathcal{A})$ дефинирана со

$$E(X|\mathcal{A}) = E(X^+|\mathcal{A}) - E(X^-|\mathcal{A}),$$

при што на множеството (со мера 0) на кое важи $E(X^+|\mathcal{A}) = E(X^-|\mathcal{A}) = +\infty$, разликата $E(X^+|\mathcal{A}) - E(X^-|\mathcal{A})$ се додефинира на произволен начин (на пример, да е еднаква на 0).

Дефиниција 13.3. Нека е дефинирано условното математичко очекување $E(X|\mathcal{A})$. **Условна дисперзија** $D(X|\mathcal{A})$ **на случајната променлива** X **во однос на** σ**-алгебрата** $\mathcal{A}$ е случајна променлива дефинирана со

$$D(X|\mathcal{A}) = E((X - E(X|\mathcal{A}))^2|\mathcal{A}).$$

7. Условно математичко очекување

Својство 13.1. *Нека* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *е простор на веројатност и нека* $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ *е* σ*-подалгебра од* σ*-алгебрата* $\mathcal{F}$. *Нека* X *и* Y *се случајни променливи за кои постојат* EX *и* EY. *Тогаш,*

(i) *ако* $X = c$ *скоро сигурно, каде* c *е константа, тогаш* $E(X|\mathcal{A}) = c$ *скоро сигурно,*

(ii) *ако* $X \leq Y$ *скоро сигурно, тогаш* $E(X|\mathcal{A}) \leq E(Y|\mathcal{A})$ *скоро сигурно,*

(iii) $|E(X|\mathcal{A})| \leq E(|X||\mathcal{A})$ *скоро сигурно,*

(iv) $E(aX + bY|\mathcal{A}) = aE(X|\mathcal{A}) + bE(Y|\mathcal{A})$ *скоро сигурно, каде* $a, b \in \mathbb{R}$,

(v) $E(X|\mathcal{A}_0) = EX$ *скоро сигурно, каде* $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *е тривијалната* σ*-алгебра,*

7. Условно математичко очекување

(vi) $E(X|\mathcal{F}) = X$ *скоро сигырно,*

(vii) *ако* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *се* σ*-подалгебри од* $\mathcal{F}$ *за кои важи* $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$, *тогаш*

$$E(E(X|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = E(E(X|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1) = E(X|\mathcal{A}_1) \text{ скоро сигурно,}$$

(viii) $E(E(X|\mathcal{A})) = EX,$

(ix) *ако случајната променлива* X *не зависи од* σ*-алгебрата* $\mathcal{A}$, *односно не зависи од индикаторот* I_B *за секој* $B \in \mathcal{A}$, *тогаш*

$$E(X|\mathcal{A}) = EX \text{ скоро сигурно.}$$

7. Условно математичко очекување

Теорема 13.1. *Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност и нека $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ е σ-подалгебра од σ-алгебрата $\mathcal{F}$. Нека X и Y се случајни променливи за кои постојат конечни EX и $E(XY)$. Тогаш,*

$$E(XY|\mathcal{A}) = Y E(X|\mathcal{A}) \text{ скоро сигурно.}$$

Дефиниција 13.4. Нека $B \in \mathcal{A}$ е произволен настан. Тогаш, условното математичко очекување $E(I_B|\mathcal{A})$ се нарекува **условна веројатност на настанот B во однос на σ-алгебрата $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$**, и се означува со $P(B|\mathcal{A})$.

7. Условно математичко очекување

Дефиниција 13.5. Нека X е случајна променлива и нека $\sigma(Y)$ е σ-алгебрата генерирана од случајната променлива Y. Ако е дефинирано математичкото очекување $E(X|\sigma(Y))$, тогаш го означиваме со $E(X|Y)$ и го нарекуваме **условно математичко очекување на случајната променлива X во однос на Y.** Условната веројатност $P(B|\sigma(Y))$ се означува со $P(B|Y)$ и се нарекува **условна веројатност на настанот B во однос на Y.**

7. Условно математичко очекување

Својство 13.2. *Нека X, X_1, X_2, Y, Z се случајни променливи, при што EX, EX_1 и EX_2 постојат и се конечни. Тогаш,*

(i) *ако $X = c$ скоро сигурно, каде c е константа, тогаш $E(X|Y) = c$ скоро сигурно,*

(ii) *ако $X_1 \leq X_2$ скоро сигурно, тогаш $E(X_1|Y) \leq E(X_2|Y)$ скоро сигурно,*

(iii) *$|E(X|Y)| \leq E(|X||Y)$ скоро сигурно,*

(iv) *$E(aX_1 + bX_2|Y) = aE(X_1|Y) + bE(X_2|Y)$ скоро сигурно, каде $a, b \in \mathbb{R}$,*

7. Условно математичко очекување

(v) *ако* Z *е функција од* Y, *тогаш*

$$E(E(X|Y)|Z) = E(E(X|Z)|Y) = E(X|Z) \text{ скоро сигурно,}$$

(vi) $E(E(X|Y)) = EX$,

(vii) *ако* X *и* Y *се независни, тогаш* $E(X|Y) = EX$ *скоро сигурно.*

(viii) *ако* X_1 *е функција од* Y, *тогаш* $E(X_1X_2|Y) = X_1E(X_2|Y)$ *скоро сигурно.*

7. Условно математичко очекување

Математичкото очекување на случајната променлива X при услов случајна променлива Y е случајна променлива $E(X|Y)$ која прима вредности $E(X|Y=y)$ кога Y прима вредност y. И бидејќи $E(X|Y=y)$ е функција од y, значи дека $E(X|Y)$ е функција од Y и нејзината распределба е одредена од распределбата на Y.

Пример 13.1. Нека Y е дискретна случајна променлива која прима вредности $y_1, y_2, ..., y_n$ со веројатности $P\{Y=y_k\}$, $k=1,2,...,n$ соодветно. Нека X е произволна случајна променлива. Тогаш, $E(X|Y)$ е случајна променлива која прима вредности $E(X|Y=y_k)$, $k=1,2,...,n$ со веројатности $P\{Y=y_k\}$, $k=1,2,...,n$ соодветно.

Резиме (IV.6-7)

- Својства на математичкото очекување
- Дисперзија на општа случајна променлива
- Коваријанса на две општи случајни променливи
- Неравенство на Марков и неравенство на Чебишев
- Условно математичко очекување

8. Карактеристични функции

Дефиниција 14.1. Нека X е случајна променлива со функција на распределба F. **Карактеристична функција** на случајната променлива X, (односно на нејзината функција на распределба F) е функцијата $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ дадена со

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x). \tag{14.1}$$

Да забележиме дека

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos tX + i \sin tX) = E(\cos tX) + iE(\sin tX).$$

Ако $F(x)$ е апсолутно нетрекината функција и $p(x)$ е густината на распределба на X, тогаш

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)\, dx.$$

Ако X е случајна променлива од дискретен тип која прима вредности $x_1, x_2, \ldots$, тогаш

$$\varphi_X(t) = \sum_k e^{itx_k} P\{X = x_k\}.$$

8. Карактеристични функции

- Својства на каратеристична функција

Теорема 14.1. *Нека X е случајна променлива со функција на распределба F. Нека $\varphi(t)$ е нејзината карактеристична функција. Тогаш,*

(i) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$,

(ii) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$,

(iii) $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)\, e^{itb}$,

(iv) *функцијата $\varphi(t)$ е рамномерно непрекината.*

8. Карактеристични функции

Пример 14.1. Функцијата $\varphi(t) = (1 - i|t|)^{-1}$ не е карактеристична функција на ниедна случајна променлива. Имено, од

$$\varphi(-t) = (1 - i|-t|)^{-1} = (1 - i|t|)^{-1} = \varphi(t) \neq (1 + i|t|)^{-1} = \overline{\varphi(t)},$$

имаме дека не е исполнето својството (ii) од Теорема 14.1, од каде следува дека $\varphi(t)$ не може да биде карактеристична функција на ниту една случајна променлива.

8. Карактеристични функции

Теорема 14.2. *Нека* X *е случајна променлива со карактеристична функција* $\varphi(t)$. *Нека за секој* $n \in \mathbb{N}$ *важи* $E|X|^n < +\infty$, *тогаш за секој* $k \leq n$ *постои изводот* $\varphi^{(k)}(t)$ *и при тоа важат равенствата*

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k \, e^{itx} dF(x), \ \text{за } k = 0, 1, ..., n,$$

$$EX^k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}, \ \text{за } k = 0, 1, ..., n,$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \, EX^k + \frac{(it)^n}{n!} \, r_n(t),$$

каде $|r_n(t)| \leq 3E|X|^n$ *и* $\lim_{t \to 0} r_n(t) = 0$.

8. Карактеристични функции

Теорема 14.3. *Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи. Тогаш,*

$$\varphi_{X_1+X_2+...+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t)\,...\,\varphi_{X_n}(t).$$

Пример 14.2. Карактеристична функција на Бернулиева распределба. Нека X има Бернулиева распределба со параметар p, односно X прима вредности 0 и 1 се веојатности $1-p$ и p соодветно. Тогаш, нејзината карактеристична функција е

$$\varphi(t) = Ee^{itX} = e^{it\cdot 0}P\{X=0\} + e^{it\cdot 1}P\{X=1\} = 1 - p + pe^{it}.$$

8. Карактеристични функции

Пример 14.3. Карактеристична функција на биномна распределба. Нека $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, тогаш карактеристичната функција на X е

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pe^{it})^n.$$

Пример 14.4. Карактеристична функција на Поасонова распределба. Нека $X \sim \mathcal{P}(a)$, тогаш карактеристичната функција на X е

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^{it})^k}{k!} = e^{-a} e^{ae^{it}} = e^{a(e^{it}-1)}.$$

8. Карактеристични функции

Пример 14.5. Карактеристична функција на геометриска распределба. Нека X има геометриска распределба со параметар p, тогаш карактеристичната функција на X е

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\, p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}((1-p)e^{it})^k = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Пример 14.8. Карактеристична функција на експоненцијална распределба. Нека $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, тогаш карактеристичната функција на X е

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

8. Карактеристични функции

Пример 14.6. Карактеристична функција на рамномерна распределба. Нека $X \sim \mathcal{U}[a,b]$, тогаш карактеристичната функција на X е

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_a^b e^{itx}\,\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (\cos(tx) + i\sin(tx))\,dx = \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \cos(tx)\,dx + i\,\frac{1}{b-a}\int_a^b \sin(tx)\,dx = \\
&= \frac{1}{b-a}\;\left.\frac{\sin(tx)}{t}\right|_a^b - i\,\frac{1}{b-a}\;\left.\frac{\cos(tx)}{t}\right|_a^b = \\
&= \frac{\sin(bt)-\sin(at)}{t(b-a)} - i\,\frac{\cos(bt)-\cos(at)}{t(b-a)} = \\
&= \frac{i\sin(bt) - i\sin(at) + \cos(bt) - \cos(at)}{it(b-a)} = \\
&= \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}.
\end{aligned}
$$

8. Карактеристични функции

Пример 14.7. Карактеристична функција на нормална распределба. Нека $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, тогаш карактеристичната функција на X е

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Ако побараме извод добиваме

$$\varphi_X'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx-x^2/2}\, dx.$$

Понатаму, со парцијална интеграција, ја добиваме диференцијалната равенка

$$\begin{aligned}
\varphi_X'(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d(e^{-x^2/2}) = \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-x*2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-x^2/2}\, dx = -t\varphi(t),
\end{aligned}$$

со почетен услов $\varphi(0) = 1$, од каде добиваме дека $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

8. Карактеристични функции

Нека сега $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, тогаш $X = \frac{Y-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, од каде $Y = \sigma X + m$ и од претходно $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$. Сега, според Теорема 14.1 (iii) имаме

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{\sigma X+m}(t) = \varphi_X(\sigma t)\, e^{itm} = e^{-(\sigma t)^2/2}\, e^{itm} = e^{itm-\sigma^2 t^2/2}.$$

- Инверзна формула на карактеристична функција

Теорема 14.4. *Нека $F(x)$ е функција на нараспределба и нека $\varphi(t)$ е нејзината карактеристична функција. Нека a и b, $a < b$, се точки на непрекинатост на $F(x)$. Тогаш, важи равенството*

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\, \varphi(t)\, dt. \qquad (14.2)$$

8. Карактеристични функции

Теорема 14.5. *На секоја карактеристична функција $\varphi(t)$ и соодветствува единствена функција на распределба $F(x)$.*

Пример 14.9. Нека случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни и еднакво распределени со експоненцијални $\mathcal{E}(1)$ распределби. Ќе покажеме дека случајните променливи $Y = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ и $Z = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$ имаат иста распределба.

Теорема 14.6. *Нека $F(x)$ е функција на распределба и нека $\varphi(t)$ е нејзината карактеристична функција. Ако $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < +\infty$, тогаш функцијата на распределба $F(x)$ е апсолутно непрекината, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\, du$ и при тоа за густината на распределба $p(x)$ важат равенствата*

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt, \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)\, dx. \tag{14.3}$$

8. Карактеристични функции

Пример 14.10. Ќе покажеме дека функцијата

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & , |t| \leq 1 \\ 0 & , |t| > 1 \end{cases}$$

не е карактеристична функција на ниедна случајна променлива.

Да го претпоставиме спротивното, односно нека $\varphi(t)$ е карактеристична функција за некоја случајна променлива со функција на распрелеба $F(x)$. Од

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\, dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} < +\infty,$$

8. Карактеристични функции

и од Теорема 14.6 следи дека функцијата на распределба $F(x)$ е апсолутно непрекината и густината на распределба е

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-itx}(1-t^2)\,dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(\cos(-tx)+i\sin(-tx))(1-t^2)\,dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\cos(tx)(1-t^2)\,dt - i\,\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\sin(tx)(1-t^2)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\cos(tx)(1-t^2)\,dt = \frac{2(\sin x - x\cos x)}{\pi x^3}, \end{aligned}$$

што не е можно, затоа што мора $p(x) \geq 0$, а ваквата густина на распределба може да прима и негативни вредности. Значи, $\varphi(t)$ не може да биде карактеристична функција на ниедна случајна преоменлива.

8. Карактеристични функции

- Примена на карактеристичните функции

Задача 1.6. Ако $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, ..., n$ се независни случајни променливи, тогаш $Y = a_1X_1 + ... + a_nX_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ каде $\mu = a_1\mu_1 + ... + a_n\mu_n$ и $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2$. Покажи.

Задача 1.8. Ако X_i, $i = 1, 2, ..., n$ се независни случајни променливи така што $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, 2, ..., n$, тогаш $Y = X_1 + ... + X_n \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ каде $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Покажи.

9. Повеḱедимензионална нормална распределба

Дефиниција 15.1. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со $\mathcal{N}(0,1)$ распределби. Тогаш, густината на распределба на случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\{-\frac{1}{2}x^T x\}, \qquad (15.1)$$

за $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, каде $x^T x = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$. Случајниот вектор X велиме дека има **стандардна повеḱедимензионална нормална распределба**.

9. Повеќедимензионална нормална распределба

Дефиниција 15.2. Нека A е $n \times n$ матрица и $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)^T$ е n-димензионален вектор. Нека X е случаен вектор со стандардна повеќедимензионална нормална распределба. Го дефинираме векторот

$$Y = \mu + AX.$$

Тогаш, велиме дека Y има **повеќедимензионална нормална распределба** со вектор на средини μ и матрица на варијанси и коваријанси $C = AA^T$. Означуваме, $Y \sim \mathcal{N}_n(\mu, C)$.

$$p_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(y-\mu)^T C^{-1}(y-\mu)\}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \qquad (15.2)$$

9. Повеќедимензионална нормална распределба

Својство 15.1. *Нека* $Y \sim \mathcal{N}_n(\mu, C)$ *и нека* $C = [c_{ij}]_{n\times n}$. *Тогаш,*

(i) *ако* B *е* $m \times n$ *матрица, тогаш* $BY \sim \mathcal{N}_m(B\mu, BCB^T)$,

(ii) *секој случаен вектор* $(Y_{i_1}, ..., Y_{i_k})$, *каде* $1 \le i_1 < ... < i_k \le n$, $2 \le k \le n$, *има повеќедимензионална нормална распределба,*

(iii) $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, *каде* $\sigma_i^2 = c_{ii}$,

(iv) $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = c_{ij}$.

9. Повеќедимензионална нормална распределба

Пример 15.1. Нека $Y_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2, ..., n$ се независни случајни промен-ливи. Тогаш, густината на распределба на случајниот вектор $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ е дадена со

$$p(y_1, ..., y_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y_k - \mu_k}{\sigma_k} \right)^2 \right\}.$$

Теорема 15.1. *Нека $X = (X_1, ..., X_n)$ е случаен вектор со повеќедимензионална нормална распределба $\mathcal{N}_n(\mu, C)$, каде $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ е вектор на средини и $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ е матрица на варијанси и коваријанси на тој случаен вектор. Нека $\lambda_1, ..., \lambda_n$ се реални броеви од кои барем еден не е нула. Тогаш,*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k \sim \mathcal{N}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k m_k, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \lambda_i \lambda_j).$$

9. Повеќедимензионална нормална распределба

Последица 15.1. *Нека* $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2, ..., n$ *се независни случајни променливи, и нека* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *се реални броеви од кои барем еден не е нула. Тогаш,*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k \sim \mathcal{N}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k m_k, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \sigma_k^2).$$

Теорема 15.2. *Нека* $X = (X_1, ..., X_n)$ *е случаен вектор со повеќедимензионална нормална распределба. Тогаш, постои несингуларна ненегативно дефинитна матрица* M, *така да комонентите* $Z_1, ..., Z_n$ *на случајниот вектор* $Z = XM$ *се независни нормално распределени случахни променливи.*