

Департман менаџмент,  
Економски факултет, УКИМ, Скопје  
(учебна 2020/2021 година – зимски семестар)

# ОПЕРАЦИОНИ ИСТРАЖУВАЊА

- АНАЛИЗА НА ОДЛУЧУВАЊЕ -

---

Проф. д-р Ирена Стојковска,  
Институт за математика,  
Природно-математички факултет,  
УКИМ, Скопје

E-mail: [irena.stojkovska@gmail.com](mailto:irena.stojkovska@gmail.com)

Web: <https://nastava-istojkovska.weebly.com/>

# Што е анализа на одлучување?

- **Теоријата на одлучување** е аналитички и систематичен пристап за изучување на донесувањето на одлуки.
- Одлуките може да бидат добри или лоши. Која е разликата меѓу добрите и лошите одлуки?
- Чекори при донесување на добри одлуки (анализа на одлучување):
  1. Јасно дефинирање на проблемот.
  2. Наведување на сите можни алтернативи (дејствија, одлуки).
  3. Откривање на сите можни состојби на системот (околности).
  4. Идентифицирање на исходите (payoff) од секоја можна комбинација на алтернативи и состојби.
  5. Избор на математички модел за одлучување.
  6. Примена на избраниот модел и донесување на одлука.

# Терминологија во анализата на одлучување

- **Доносител на одлука** е ентитет кој е одговорен за донесувањето на одлуката. Како доносител на одлуката може да биде поединец, одбор, компанија и слично.
- **Алтернативи** (одлуки, дејствија) се конечен број на можни одлуки што може да бидат избрани од доносителот на одлуката. Алтернатива која секогаш треба да се вклучи е да не се прави ништо, т.е. да не се презема никакво дејствие.
- **Состојби** на системот (околности, ситуации) се сценарија или состојби наметнати од природата што може да се случат. Состојбите се меѓусебно исклучливи настани.
- **Исходи** (payoff) се последиците кои се резултат на конкретната одлука при конкретна состојба на системот. Исходите може да бидат описни или изразени со монетарна вредност.

# Терминологија во анализата на одлучување

**Пример 1.** Сакаме да излеземе на прошетка. Треба да одлучиме дали да понесеме чадор со себе.

Алтернативи	Состојби	
	Не вrne	Вrne
Да понесеме чадор	<i>Непотребно носиме дополнителен товар, ние сме суви.</i>	<i>Носиме дополнителен товар, ние сме суви.</i>
Да излеземе без чадор	<i>Не носиме непотребно дополнителен товар, ние сме суви.</i>	<i>Не носиме дополнителен товар, ние сме накиснати.</i>

# Терминологија во анализата на одлучување

**Пример 2.** (Savage, 1954) Вашата жена тукушто скршила пет јајца во чинијата, а вие во тој момент доаѓате и се нудите да го завршите правењето на омлетот. Шестото јајце не е скршено и заради некоја причина, вие треба да одлучите дали ќе го искористите за омлетот или ќе го фрлите. Треба да се одлучите за едно од следниве дејствија:

- (А) да го скршите јајцето во чинијата заедно со останатите пет јајца,
- (Б) да го скршите јајцето во друга чинија за да проверите дали е добро,
- (В) да го фрлите јајцето без да го проверите дали е добро.

Шестото јајце може да е добро или расипано. Кои се можните исходи од дејствијата при секоја од состојбите на јајцето?

# Терминологија во анализата на одлучување

Алтернативи	Состојби	
	Добро јајце	Расипано јајце
Да се скрши во чинијата (А)	<i>Омлет од шест јајца.</i>	<i>Нема омлет, уништени пет добри јајца.</i>
Да се скрши во друга чинија (Б)	<i>Омлет од шест јајца, една плус чинија за миење.</i>	<i>Омлет од пет јајца, една плус чинија за миење.</i>
Да се фрли (В)	<i>Омлет од пет јајца, уништено едно добро јајце.</i>	<i>Омлет од пет јајца.</i>

# Терминологија во анализата на одлучување

- Општа табела на одлучување:

Алтернативи	Состојби			
	$S_1$	$S_2$	...	$S_n$
$A_1$	$V_{11}$	$V_{12}$	...	$V_{1n}$
$A_2$	$V_{21}$	$V_{22}$	...	$V_{2n}$
...	...	...	...	...
$A_m$	$V_{m1}$	$V_{m2}$	...	$V_{mn}$

$A_i$  –  $i$ -тата алтернатива,  $i=1,2,\dots,m$

$S_j$  –  $j$ -тата состојба,  $j=1,2,\dots,n$

$V_{ij}$  – последицата (исходот) од преземање на алтернативата  $A_i$  при состојба на системот  $S_j$ ,  $i=1,2,\dots,m$ ,  $j=1,2,\dots,n$

# Типови на окружувања во процесот на донесување одлуки

- Постојат три окружувања во процесот на донесување одлуки:
  - **Донесување одлуки во услови на сигурност.** Доносителите на одлуки со сигурност ја знаат последицата од секоја алтернатива.
  - **Донесување одлуки во услови на неизвесност.** Постојат неколку можни исходи за секоја алтернатива и доносителот на одлуката ниту знае кој исход ќе се реализира, ниту ја знае веројатноста за реализација на исходите. (критериум на оптимизам, критериум на песимизам, критериум на реализам, критериум на еднакви шанси, критериум на минимално жалење)
  - **Донесување одлуки во услови на ризик.** Постојат неколку можни исходи за секоја алтернатива и доносителот на одлуката ја знае веројатноста за реализација на исходите. (критериум на очекуваната монетарна вредност, критериум на очекуваната опотрументна загуба)



# Одлучување во услови на неизвесност

**Пример 3.** Една компанија се соочува со проблем дали да го прошири своето производство. Компанијата ги разгледува следните алтернативи: 1) да изгради голема фабрика за производство, 2) да изгради мала фабрика, или 3) да не гради воопшто. Можните состојби на системот (пазарот) се: поволен пазар и неповолен пазар. За секоја можна комбинација од алтернатива и состојба на системот, исходите во вид на профит (добивка или загуба) дадени се во следната табела:

Алтернативи	Состојби	
	Поволен пазар (п.е.)	Неповолен пазар (п.е.)
Да се изгради голема фабрика	260000	-240000
Да се изгради мала фабрика	130000	-50000
Да не се прави ништо	0	0

# Одлучување во услови на неизвесност

## Критериум на оптимизам

Се бара најдобриот (максималниот) исход за секоја алтернатива, а потоа од тие исходи се избира алтернативата со најдобар (максимален) исход (**Maximax**).

Алтернативи	Состојби		Максимум во редица (п.е.)
	Поволен пазар (п.е.)	Неповолен пазар (п.е.)	
Да се изгради голема фабрика	260000	-240000	<b>260000</b> <b>(Оптимизам)</b>
Да се изгради мала фабрика	130000	-50000	130000
Да не се прави ништо	0	0	0

# Одлучување во услови на неизвесност

## Критериум на песимизам

Се бара најлошиот (минималниот) исход за секоја алтернатива, а потоа од тие исходи се избира алтернативата со најдобар (максимален) исход (**Minimax**).

Алтернативи	Состојби		Минимум во редица (п.е.)
	Поволен пазар (п.е.)	Неповолен пазар (п.е.)	
Да се изгради голема фабрика	260000	-240000	-240000
Да се изгради мала фабрика	130000	-50000	-50000
Да не се прави ништо	0	0	0 <b>(Песимизам)</b>

# Одлучување во услови на неизвесност

## Критериум на реализам (Hurwicz)

$\alpha$  - коефициент на реализам ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

Тежинска средина =  
 $= \alpha$  (најдобар исход во редицата) +  $(1 - \alpha)$  (најлош исход во редицата)

Алтернативи	Состојби		Тежинска средина на редицата за $\alpha=0,7$ (п.е.)
	Поволен пазар (п.е.)	Неповолен пазар (п.е.)	
Да се изгради голема фабрика	260000	-240000	<b>110000</b> <b>(Реализам)</b>
Да се изгради мала фабрика	130000	-50000	76000
Да не се прави ништо	0	0	0

$$0,7 \cdot 260000 + (1 - 0,7) \cdot (-240000) = 182000 - 72000 = 110000 \text{ п.е.}$$

$$0,7 \cdot 130000 + (1 - 0,7) \cdot (-50000) = 91000 - 15000 = 76000 \text{ п.е.}$$

# Одлучување во услови на неизвесност

## Критериум на реализам (Hurwicz)

### Анализа на осетливоста

- Како се менува одлуката во однос на промената на коефициентот на реализам  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )?

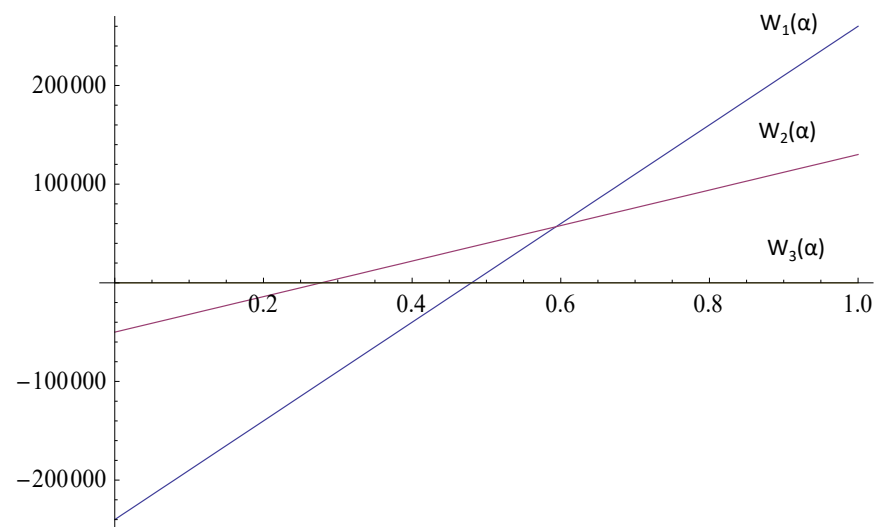
- Тежинските средини за секоја од алтернативите се:

$$W_1(\alpha) = \alpha \cdot 260000 + (1 - \alpha) \cdot (-240000) \\ = 500000 \cdot \alpha - 240000$$

$$W_2(\alpha) = \alpha \cdot 130000 + (1 - \alpha) \cdot (-50000) \\ = 180000 \cdot \alpha - 50000$$

$$W_3(\alpha) = 0$$

- За  $0 \leq \alpha \leq 0,27$ , најдобра одлука е да не се прави ништо.  
За  $0,27 \leq \alpha \leq 0,59$ , најдобра одлука е да се изгради мала фабрика.  
За  $0,59 \leq \alpha \leq 1$ , најдобра одлука е да се изгради голема фабрика.



# Одлучување во услови на неизвесност

## Критериум на еднакви шанси (Laplace)

Главна претпоставка е дека сите состојби на системот се еднакво веројатни. Се бара средна вредност на исходите во секој ред, а потоа се избира алтернативата која има најдобра (максимална) средна вредност на исходите.

Алтернативи	Состојби		Средна вредност на редицата (п.е.)
	Поволен пазар (п.е.)	Неповолен пазар (п.е.)	
Да се изгради голема фабрика	260000	-240000	10000
Да се изгради мала фабрика	130000	-50000	<b>40000 (Laplace)</b>
Да не се прави ништо	0	0	0

# Одлучување во услови на неизвесност

## Критериум на *minimax* жалење

Опортунентна загуба е разлика меѓу најдобриот исход за дадена состојба на системот и соодветниот исход за конкретна алтернатива за таа состојба на системот.

Табела на опортунентни загуби			
Алтернативи	Состојби		Максимум во редица (п.е.)
	Поволен пазар (п.е.)	Неповолен пазар (п.е.)	
Да се изгради голема фабрика	$260000 - 260000 = 0$	$0 - (-240000) = 240000$	240000
Да се изгради мала фабрика	$260000 - 130000 = 130000$	$0 - (-50000) = 50000$	<b>130000 (minimax жалење)</b>
Да не се прави ништо	$260000 - 0 = 260000$	$0 - 0 = 0$	260000

# Одлучување во услови на ризик

## Критериум на очекувана монетарна вредност (EMV)

- Познати се веројатностите за состојбите на системот. Нека  $S_1, S_2, \dots, S_n$  се состојбите на системот кои се реализираат со веројатности  $P(S_1), P(S_2), \dots, P(S_n)$ .
- Нека за алтернативата  $A_i$  исходите се  $V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{in}$ , тогаш  $P(V_{ij}) = P(S_j)$ .
- **Очекуваната монетарна вредност (Expected Monetary Value – EMV)** на алтернативата  $A_i$  е

$$EMV(A_i) = V_{i1} \cdot P(V_{i1}) + V_{i2} \cdot P(V_{i2}) + \dots + V_{in} \cdot P(V_{in})$$

- (Пример 3) Да претоставиме дека  $P(S_1) = P(S_2) = 0,5$ . Тогаш,

$$EMV(A_1) = 260000 \cdot 0,5 + (-240000) \cdot 0,5 = 10000 \text{ п.е.}$$

$$EMV(A_2) = 130000 \cdot 0,5 + (-50000) \cdot 0,5 = 40000 \text{ п.е.}$$

$$EMV(A_3) = 0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 0 \text{ п.е.}$$



# Одлучување во услови на ризик

## Критериум на очекувана монетарна вредност (EMV)

Алтернативи	Состојби		EMV (п.е.)
	Поволен пазар (п.е.)	Неповолен пазар (п.е.)	
Да се изгради голема фабрика	260000	-240000	10000
Да се изгради мала фабрика	130000	-50000	<b>40000</b> <b>(најдобро EMV)</b>
Да не се прави ништо	0	0	0
Веројатности	0,5	0,5	

$$\begin{aligned}
 EMV(A_1) &= \\
 &= 260000 \cdot 0,5 + (-240000) \cdot 0,5 \\
 &= 10000 \text{ п.е.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EMV(A_2) &= \\
 &= 130000 \cdot 0,5 + (-50000) \cdot 0,5 \\
 &= 40000 \text{ п.е.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EMV(A_3) &= \\
 &= 0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 0 \text{ п.е.}
 \end{aligned}$$

# Одлучување во услови на ризик

## Очекувана вредност на перфектна информација (EVPI)

- Околина на одлучување во услови на ризик може да се доведе до окоина на одлучување во услови на сигурност, ако доносителот на одлуки располага со **перфектна информација**. EVPI ја мери вредноста за познавање на перфектна информација.
- Табелата за очекуваната монетарна вредност се проширува со редица која одговара на **очекуваната вредност со перфектна информација (EVwPI)** која се наоѓа како очекувана вредност од најдобрите исходи за секоја состојба на системот. Потоа, **очекуваната вредност на перфектна информација (EVPI)** е разлика меѓу EVwPI и најдоброто EMV т.е.

$$EVPI = EVwPI - \text{најдобро EMV}$$

# Одлучување во услови на ризик

## Очекувана вредност на перфектна информација (EVPI)

Алтернативи	Состојби		EMV (п.е.)
	Поволен пазар (п.е.)	Неповолен пазар (п.е.)	
Да се изгради голема фабрика	260000	-240000	10000
Да се изгради мала фабрика	130000	-50000	40000
Да не се прави ништо	0	0	0
Со перфектна информација	260000	0	<b>130000 (EVwPI)</b>
Веројатности	0,5	0,5	

$$EVwPI = 0,5 \cdot 260000 + 0,5 \cdot 0 = 130000$$

$$EVPI = EVwPI - \text{најдобро EMV} = 130000 - 40000 = 90000 \text{ п.е.}$$

Доносителот на одлуки е подготвен да плати најмногу 90000 п.е. за перфектна информација.

# Одлучување во услови на ризик

## Критериум на очекувана опортунентна загуба (EOL)

Табела на опортунентни загуби			
Алтернативи	Состојби		EOL (п.е.)
	Поволен пазар (п.е.)	Неповолен пазар (п.е.)	
Да се изгради голема фабрика	0	240000	120000
Да се изгради мала фабрика	130000	50000	<b>90000 (најдобар EOL)</b>
Да не се прави ништо	260000	0	130000
Веројатности	0,5	0,5	

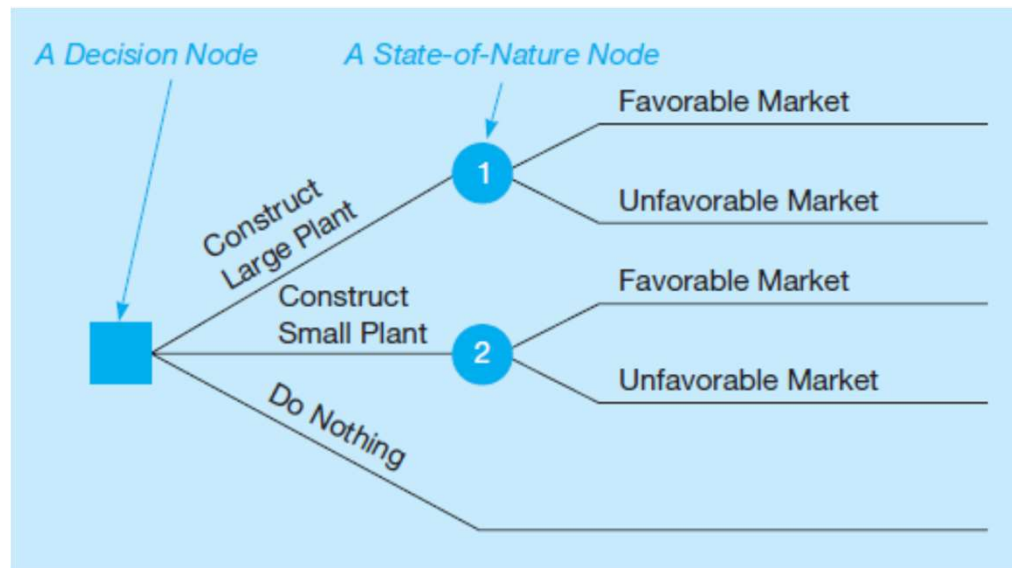
$$\begin{aligned} EOL(A_1) &= \\ &= 0 \cdot 0,5 + 240000 \cdot 0,5 \\ &= 120000 \text{ п.е.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EOL(A_2) &= \\ &= 130000 \cdot 0,5 + 50000 \cdot 0,5 \\ &= 90000 \text{ п.е.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EOL(A_3) &= \\ &= 260000 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 \\ &= 130000 \text{ п.е.} \end{aligned}$$

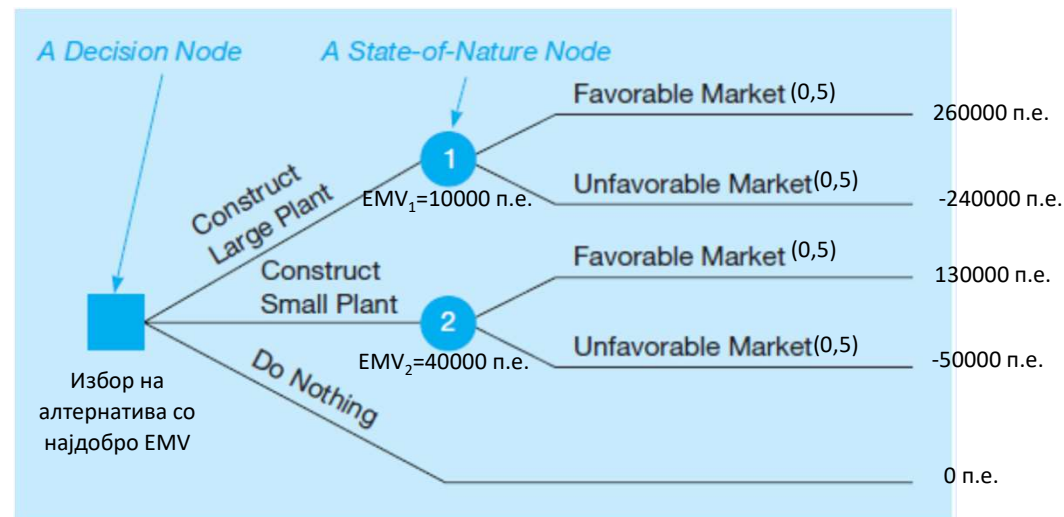
# Дрво на одлуки

- **Дрвата на одлуки** се шематски приказ на проблемот на одлучување и се составени од **јазли на одлуки** (квадратчиња) и **јазли на состојби на системот** (кругчиња).



# Дрво на одлуки (EMV критериум)

- Ако сакаме дрвото да го искористиме за донесување одлуки според EMV критериумот, ги внесуваме исходите и веројатностите за состојбите на системот, и правиме избор на алтернативата со најдобро EMV.



# Проблем на минимизација

**Пример 4.** Центартот за Бизнес аналитика сака да изнајми машина за копирање на три години, и за таа цел разгледува три различни машини. Месечниот трошок на секоја од трите машини при секоја од трите ситуации е даден во табелата.

Алтернативи	Состојби		
	10000 копии месечно (п.е.)	20000 копии месечно (п.е.)	30000 копии месечно (п.е.)
Машина А	950	1050	1150
Машина Б	850	1100	1350
Машина В	700	1000	1300

# Проблем на минимизација (Критериум на оптимизам - Minimin и критериум на песимизам - Maximin)

Алтернативи	Состојби			Најдобар исход (минимум)	Најлош исход (максимум)
	10000 копии месечно (п.е.)	20000 копии месечно (п.е.)	30000 копии месечно (п.е.)		
Машина А	950	1050	1150	950	<b>1150</b> (Песимизам)
Машина Б	850	1100	1350	850	1350
Машина В	700	1000	1300	<b>700</b> (Оптимизам)	1300



# Проблем на минимизација (Критериум на реализам)

Претпоставка: Коефициент на реализам  $\alpha=0,7$

Тежинска средина =

=  $\alpha$  (најдобар исход во редицата) +  $(1 - \alpha)$  (најлош исход во редицата)

Алтернативи	Состојби			Тежинска средина на редицата за $\alpha=0,7$ (п.е.)	
	10000 копии месечно (п.е.)	20000 копии месечно (п.е.)	30000 копии месечно (п.е.)		
Машина А	950	1050	1150	1010	$0,7 \cdot 950 + (1 - 0,7) \cdot 1150 = 1010$ п.е.
Машина Б	850	1100	1350	1000	$0,7 \cdot 850 + (1 - 0,7) \cdot 1350 = 1000$ п.е.
Машина В	700	1000	1300	<b>880</b> <b>(Реализам)</b>	$0,7 \cdot 700 + (1 - 0,7) \cdot 1300 = 880$ п.е.

# Проблем на минимизација (Критериум на еднакви шанси -Laplace)

Алтернативи	Состојби			Средна вредност на редицата (п.е.)
	10000 копии месечно (п.е.)	20000 копии месечно (п.е.)	30000 копии месечно (п.е.)	
Машина А	950	1050	1150	1050
Машина Б	850	1100	1350	1100
Машина В	700	1000	1300	<b>1000 (Laplace)</b>

$$(950 + 1050 + 1150) / 3 = 1050 \text{ п.е.}$$

$$(850 + 1100 + 1350) / 3 = 1100 \text{ п.е.}$$

$$(700 + 1000 + 1300) / 3 = 1000 \text{ п.е.}$$

# Проблем на минимизација (Критериум на *minimax* жалење)

Табела на опортунентни загуби

Алтернативи	Состојби			Максимум во редица (п.е.)
	10000 копии месечно (п.е.)	20000 копии месечно (п.е.)	30000 копии месечно (п.е.)	
Машина А	$950 - 700 = 250$	$1050 - 1000 = 50$	$1150 - 1150 = 0$	250
Машина Б	$850 - 700 = 150$	$1100 - 1000 = 100$	$1350 - 1150 = 200$	200
Машина В	$700 - 700 = 0$	$1000 - 1000 = 0$	$1300 - 1150 = 150$	<b>150</b> <b>(minimax жалење)</b>

# Проблем на минимизација (EMV критериум)

Претпоставка:  $P(S_1) = 0,4$ ,  $P(S_2) = 0,3$  и  $P(S_3) = 0,3$ .

$EMV(A_1) = 0,4 \cdot 950 + 0,3 \cdot 1050 + 0,3 \cdot 1150 = 1040$  п.е.

$EMV(A_2) = 0,4 \cdot 850 + 0,3 \cdot 1100 + 0,3 \cdot 1350 = 1075$  п.е.

$EMV(A_3) = 0,4 \cdot 700 + 0,3 \cdot 1000 + 0,3 \cdot 1300 = 970$  п.е.

Алтернативи	Состојби			EMV (п.е.)
	10000 копии месечно (п.е.)	20000 копии месечно (п.е.)	30000 копии месечно (п.е.)	
Машина А	950	1050	1150	1040
Машина Б	850	1100	1350	1075
Машина В	700	1000	1300	<b>970</b> <b>(Најдобро EMV)</b>
Веројатности	0,4	0,3	0,3	

# Проблем на минимизација (EVPI)

Алтернативи	Состојби			EMV (п.е.)
	10000 копии месечно (п.е.)	20000 копии месечно (п.е.)	30000 копии месечно (п.е.)	
Машина А	950	1050	1150	1040
Машина Б	850	1100	1350	1075
Машина В	700	1000	1300	970
Со перфектна информација	700	1000	1150	925 (EVwPI)
Веројатности	0,4	0,3	0,4	

$$EVwPI = 0,4 \cdot 700 + 0,3 \cdot 1000 + 0,3 \cdot 1150 = 925 \text{ п.е.}$$

$$EVPI = \text{најдобро EMV} - EVwPI = 970 - 925 = 45 \text{ п.е.}$$

Доносителот на одлуки е подготвен да плати најмногу 45 п.е. за перфектна информација.

# Проблем на минимизација (EOL критериум)

Табела на опортунентни загуби

Алтернативи	Состојби			EOL (п.е.)
	10000 копии месечно (п.е.)	20000 копии месечно (п.е.)	30000 копии месечно (п.е.)	
Машина А	250	50	0	115
Машина Б	150	100	200	150
Машина В	0	0	150	<b>45 (Најдобар EOL)</b>
Веројатности	0,4	0,3	0,3	

$$EOL(A_1) = 0,4 \cdot 250 + 0,3 \cdot 50 + 0,3 \cdot 0 = 115 \text{ п.е.}$$

$$EOL(A_2) = 0,4 \cdot 150 + 0,3 \cdot 100 + 0,3 \cdot 200 = 150 \text{ п.е.}$$

$$EOL(A_3) = 0,4 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0 + 0,3 \cdot 150 = 45 \text{ п.е.}$$