V. ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ

1. Неравенство на Чебишев. Закон на големите броеви на Колмогоров

Нека X е случајна променлива и $\varepsilon > 0$. Неравенството наЧебишев се среќава во повеќе облици, некои од нив се:

(1) $P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{E|X|}{\varepsilon}$ **(Основен Облик на Неравенство на Чебишев)**

(2) $P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{DX}{\varepsilon^2}$ **(Неравенство на Чебишев)**

За низата случајни променливи $X_1, X_2, \ldots$ важи **слабиот закон на големите броеви**, ако за $\varepsilon > 0$, $\quad P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)| \geq \varepsilon\} \to 0$, кога $n \to \infty$,

т.е. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)$.

За низата случајни променливи $X_1, X_2, \ldots$ важи **силниот закон на големите броеви**, ако $P\{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)\} = 1$, т.е. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{c.c.} E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)$.

Теорема. (на Хинчин) Нека $X_1, X_2, \ldots$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со $EX_k = a < +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$, тогаш за низата $X_1, X_2, \ldots$ важи слабиот закон на големите броеви т.е. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} a$.

Теорема. Нека $X_1, X_2, \ldots$ се независни случајни променливи со $EX_k = 0$, $DX_k = \sigma_k{}^2$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n{}^2}{n^2} < +\infty$, тогаш за низата $X_1, X_2, \ldots$ важи силниот закон на големите броеви т.е. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{c.c.} 0$.

1. Случајната големина ξ има математичко очекување $M\xi = 3$ и средно квадратно отстапување $\sigma = 0{,}1$. Со помош на неравенството на Чебишев да се оцени веројатноста $P\{2{,}5 < \xi < 3{,}5\}$.

Решение:

За $x > 0$, важи $P\{|\xi - M\xi| \geq x\} \leq \frac{D\xi}{x^2}$ (неравенство на Чебишев). Бидејќи $\sigma = \sqrt{D\xi}$, имаме дека $D\xi = \sigma^2 = 0{,}01$, па затоа

$$P\{2{,}5 < \xi < 3{,}5\} = P\{2{,}5 - 3 < \xi - M\xi < 3{,}5 - 3\} = P\{|\xi - M\xi| < 0{,}5\} =$$
$$= 1 - P\{|\xi - M\xi| \geq 0{,}5\} \geq 1 - \frac{D\xi}{0{,}5^2} = 1 - \frac{0{,}01}{0{,}25} = 0{,}96.$$

2. Математичкото очекување на почетната брзина на куршумот е 500*m/s*. Со помош на неравенството на Чебишев да се оцени од горе веројатноста да при испукување на произволен куршум неговата почетна брзина е не помала од 800*m/s*.

Решение:

Нека ξ е почетна брзина на куршум. Дадено е дека $M\xi = 500$. Се бара со помош на неравенството на Чебишев да се оцени веројатноста

$$P\{\xi \geq 800\} \leq \frac{M\xi}{800} = \frac{500}{800} = 0{,}625 .$$

3. Дисперзијата на секоја од 2500 независни случајни големини е 5. Да се оцени веројатноста дека отстапувањето на аритметичката средина на тие случајни големини од аритметичката средина на нивните математички очекувања не надминува 0,4.

Решение:

Нека ги означиме со $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2500}$ независните случајни големини и за нив е дадено дека $D\xi_i = 5$, $i = 1, 2, \ldots, 2500$. Со користење на неравенството на Чебишев и својството за дисперзија од збир на независни случајни големини, имаме

$$P\{|\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500}\xi_i - \frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500}M\xi_i| \leq 0{,}4\} = P\{|\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500}\xi_i - M(\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500}\xi_i)| \leq 0{,}4\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{D(\frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{2500}\xi_i)}{0{,}4^2} = 1 - \frac{\frac{1}{2500^2}\sum_{i=1}^{2500}D\xi_i}{0{,}16} = 1 - \frac{\frac{1}{2500^2}\cdot 2500\cdot 5}{0{,}16} = 0{,}9875 .$$

4. Веројатноста за појавување на настанот A во било кој од n независни експерименти е $p = \frac{1}{3}$. Да се определи минималниот број на експерименти така што со веројатност не помала од 0,99 апсолутното отстапување на релативната честота од $P(A)$ не надминува 0,01.

Решение:

Случајната големина ξ - број на појавувања на настанот A во серија од n независни експерименти, има биномна распределба $B(n, \frac{1}{3})$, од каде $M\xi = \frac{n}{3}$ и $D\xi = \frac{2n}{9}$. Количникот $\frac{\xi}{n}$ е релативната честота при спроведување на експериментот n пати. Се бара минималниот природен број n за кој важи неравенството

$$P\{|\frac{\xi}{n} - P(A)| \leq 0{,}01\} \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \; P\{|\xi - \frac{n}{3}| \leq 0{,}01n\} \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \; P\{|\xi - M\xi| \leq 0{,}01n\} \geq 0{,}99$$

Од неравенството на Чебишев имаме

$$P\{|\xi - M\xi| \leq 0{,}01n\} \geq 1 - \frac{D\xi}{(0{,}01n)^2} = 1 - \frac{\frac{2n}{9}}{(0{,}01n)^2} .$$

За да е исполнето неравенството $P\{|\frac{\xi}{n} - P(A)| \leq 0{,}01\} \geq 0{,}99$, треба

$$1 - \frac{\frac{2n}{9}}{(0{,}01n)^2} \geq 0{,}99 \; \Leftrightarrow \; n \geq 222222{,}2 .$$

Значи, бараниот минимален број на експерименти е $n = 222223$.

5. Дадена е низата од независни случајни големини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ со нивните закони на распределба

ξ_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
p	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

$n = 1, 2, \ldots$

Дали важи законот на големи броеви за низата $\{\xi_n\}$?

Решение:

За математичкото очекување и дисперзијата на секоја од случајните големини имаме,

$$M\xi_n = (-\sqrt{n}) \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1-\frac{2}{n}) + \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = 0 \,, \ \forall n \in N$$

$$M\xi_n{}^2 = (-\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + 0^2 \cdot (1-\frac{2}{n}) + (\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = 2 \,, \ \forall n \in N$$

$$D\xi_n = M\xi_n{}^2 - (M\xi_n)^2 = 2 - 0^2 = 2 \,, \ \forall n \in N$$

Од добиените резултати и со користење на неравенството на Чебишев и својството за дисперзија од збир на независни случајни големини, имаме дека за произволен $\varepsilon > 0$ важи

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i| < \varepsilon\} = P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i)| < \varepsilon\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\frac{1}{n^2}\cdot n \cdot 2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Значи, за низата независни и од погоре добиеното и еднакво распределени случајни големини $\{\xi_n\}$ важи законот на големи броеви.

6. Дали за низата $\{\xi_n\}$ од независни случајни големини со распределби

ξ_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, $n = 1, 2, \ldots$

важи законот на големите броеви ?

Решение:

За математичкото очекување и дисперзијата на случајните големини ξ_n имаме,

$$M\xi_n = (-\sqrt{\ln n}) \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{\ln n} \cdot \frac{1}{2} = 0 \,,$$

$$M\xi_n{}^2 = (-\sqrt{\ln n})^2 \cdot \frac{1}{2} + (\sqrt{\ln n})^2 \cdot \frac{1}{2} = \ln n \,,$$

$$D\xi_n = M\xi_n{}^2 - (M\xi_n)^2 = \ln n - 0^2 = \ln n \,.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно, тогаш од

$$P\{|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - M(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n})| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1+\ldots+D\xi_n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{\ln 1+\ldots+\ln n}{\varepsilon^2 n^2} \leq$$

$$\leq \frac{n\ln n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{\ln n}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,,$$

следува дека $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} \xrightarrow{P} M(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}) = 0$, односно важи слабиот закон на големи броеви.

Бидејќи $\xi_1, \xi_2, \ldots$ се независни, $M\xi_n = 0$, $D\xi_n = \ln n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} < +\infty$,

(затоа што за $x \geq 1$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \geq 0$, $f(x)$ опаѓа и $\int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx < +\infty$) следува дека

$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{c.c.} M(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}) = 0$, односно важи силниот закон на големи броеви.

2. Карактеристични функции

Нека X и Y се (реални) случајни променливи. Математичко очекување на комплексна случајна променлива $Z = X + iY$ се дефинира како $EZ = EX + iEY$.

Карактеристична функција на случајната променлива X е функцијата $\varphi_X(t) = Ee^{itX} = E(\cos tX + i \sin tX)$.

Ако X е од дискретен тип, тогаш $\varphi_X(t) = Ee^{itX} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} P\{X = x_k\}$.

Ако X е од апсолутно непрекинат тип, тогаш $\varphi_X(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_X(x) dx$.

Корисни трансформации: $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}$.

Својства:

1) $Y = aX + b \;\Rightarrow\; \varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$

2) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независни $\Rightarrow$ $\varphi_{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)$

3) $EX^k = \dfrac{\varphi_X{}^{(k)}(0)}{i^k}$

Инверзна формула на карактеристична функција за случајна променлива од апсолутно непрекинат тип:

Ако $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\, dt < +\infty$, тогаш $p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$.

1. Да се одреди законот на распределба на случајната големина ξ, ако е дадена нејзината карактеристична функција $f_\xi(t) = e^{2it} \cdot \cos\frac{t}{2}$.

Решение:

Од $\cos\frac{t}{2} = \frac{e^{\frac{it}{2}} + e^{-\frac{it}{2}}}{2}$ имаме,

$f_\xi(t) = e^{2it} \cdot \cos\frac{t}{2} = e^{2it} \cdot \frac{e^{\frac{it}{2}} + e^{-\frac{it}{2}}}{2} = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{2}it} + \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}it}$, па од дефиницијата на карактеристична функција како математичко очекување од $e^{it\xi}$, односно $f_\xi(t) = Me^{it\xi}$, имаме дека ξ е случајна големина од дискретен конечен тип, која прима вредности $\xi \in \{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$ со веројатности

$$P\{\xi = \tfrac{3}{2}\} = \tfrac{1}{2} \text{ и } P\{\xi = \tfrac{5}{2}\} = \tfrac{1}{2}.$$

2. Нека е дадена низата $\xi_1, \xi_2, \ldots$ од независни случајни големини со густини на распределба $p_{\xi_n}(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$, $x > 0$. Дали за низата $\{\xi_n\}$ важи законот на големи броеви ?

Решение:

Математичкото очекување на ξ_n е

$$M\xi_n = \int_0^\infty x \cdot \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{1}{n!} I_{n+1},$$

каде $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$, па тогаш

$$M\xi_n = \frac{1}{n!} I_{n+1} = \frac{1}{n!}(n+1)! = n+1.$$

Воведуваме нови случајни големини

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n M\xi_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{(n+1)(n+2)}{2n}, \; n = 1, 2, \ldots$$

и ако покажеме дека низата $\{\eta_n\}$ конвергира по веројатност, односно скоро сигурно кон 0, тогаш за низата $\{\xi_n\}$ важи слабиот, односно силниот закон на големи броеви.

Карактеристичните гункции на ξ_n се

$$f_{\xi_n}(t) = Me^{it\xi_n} = \int_0^\infty e^{itx} \cdot \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{(it-1)x} dx = \frac{1}{n!} J_n,$$

каде $J_n = \int_0^\infty x^n e^{(it-1)x} dx = \frac{n!}{(1-it)^{n+1}}$, па тогаш

$$f_{\xi_n}(t) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{(1-it)^{n+1}} = \frac{1}{(1-it)^{n+1}}.$$

Од $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независни имаме,

$$f_{\sum_{k=1}^n \xi_k}(t) = \prod_{k=1}^n f_{\xi_k}(t) = \frac{1}{(1-it)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}, \text{ од каде}$$

$$f_{\eta_n}(t) = e^{-it\frac{(n+1)(n+2)}{2n}} \cdot f_{\sum_{k=1}^n \xi_k}(\tfrac{t}{n}) = e^{-it\frac{(n+1)(n+2)}{2n}} \cdot \frac{1}{(1-i\frac{t}{n})^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}, \text{ од каде}$$

$$\begin{aligned}\ln f_{\eta_n}(t) &= -it\,\frac{(n+1)(n+2)}{2n} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\ln(1 - i\,\tfrac{t}{n}) = \\ &= -it\,\frac{(n+1)(n+2)}{2n} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}(-i\,\tfrac{t}{n} - \tfrac{1}{2}(i\,\tfrac{t}{n})^2 - o(\tfrac{1}{n^2})) = \\ &= -it\,\frac{(n+1)(n+2)}{2n} + it\,\frac{(n+1)(n+2)}{2n} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n^2}\frac{(n+1)(n+2)}{2} + o(\tfrac{1}{n^2}) =\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^2}{n^2}\frac{(n+1)(n+2)}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{t^2}{4},$$

односно

$$f_{\eta_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{4}}, \text{ па } \eta_n \Rightarrow \mu, \text{ каде } \mu : N(0,\tfrac{1}{2}).$$

Значи низата $\{\eta_n\}$ не конвергира по распределба кон 0, па таа не конвергира ни по веројатност кон 0 и не конвергира скоро сигурно кон 0. Па, за низата $\{\xi_n\}$ не важи законот на големи броеви.

3. Дадена е низата од независни случајни големини $\xi_1, \xi_2, \ldots$, така што ξ_n има χ_n^2 распределба, $n = 1, 2, \ldots$ и $\eta_n = \frac{\xi_n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Докажи дека низата $\{\eta_n\}$ конвергира по веројатност кон 1.

Решение:

I начин: Ако $\xi_n : \chi_n^2$, значи дека ξ_n имаат Гама распределба со параметри $\alpha = \frac{n}{2}$ и $\lambda = \frac{1}{2}$, односно нивните густини на распределба се

$$p_{\xi_n}(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}, \ x \geq 0, \text{ од каде } M\xi_n = n \text{ и } D\xi_n = 2n.$$

Тогаш од неравенството на Чебишев имаме,

$$P\{|\eta_n - 1| > \varepsilon\} = P\{|\frac{\xi_n}{n} - 1| > \varepsilon\} = P\{|\xi_n - n| > n\varepsilon\} \leq \frac{D\xi_n}{(n\varepsilon)^2} = \frac{2n}{(n\varepsilon)^2} = \frac{2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

односно $\eta_n \xrightarrow{P} 1$.

II начин: Ако $\xi_n : \chi_n^2$, тогаш $\xi_n = \sum_{k=1}^{n} {\mu_k}^2$, каде $\mu_k : N(0,1^2)$ и μ_k, $k = 1, \ldots, n$ се независнислучајни големини. Тогаш,

$$\eta_n = \frac{\xi_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {\mu_k}^2 .$$

Од μ_k, $k = 1, \ldots, n$ независни и еднакво распределени, следува дека и ${\mu_k}^2$, $k = 1, \ldots, n$ се независни и еднакво распределени и бидејќи

$$M{\mu_k}^2 = D\mu_k + (M\mu_k)^2 = 1 + 0^2 = 1 < \infty,$$

исполнети се условите од теоремата на Хинчин, па следува дека $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {\mu_k}^2 \xrightarrow{P} 1$,

односно $\eta_n \xrightarrow{P} 1$.

4. Нека $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$ е карактеристична функција на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип. Најди ја распределбата на X.

Решение:

$$p_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(t-ix)^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}\cdot\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow X \sim N(0,1^2)$$

5. Најди ја густината на распределба на случајната промелива X со карактеристична функција

$$\varphi(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

Решение:

$$p_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-itx}(1-|t|)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}e^{-itx}(1+t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}e^{-itx}(1-t)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi x^2}(2-e^{ix}-e^{-ix})=\frac{1}{\pi x^2}(1-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})=\frac{1-\cos x}{\pi x^2}$$

6. Да се покаже дека ако $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ се независни случајни големини со $N(0,1^2)$ распределби, тогаш исто таква распределба има случајната големина

а) $\eta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)$,

б) $\mu_n=\frac{1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2}}(c_1\xi_1+c_2\xi_2+\ldots+c_n\xi_n)$, каде $c_k=const.$, $k=1,2,\dots,n$.

Решение:

Ако $\xi_k : N(0,1^2)$, $k=1,2,\dots,n$, тогаш нивните карактеристични функции се $f_{\xi_k}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$, $k=1,2,\dots,n$.

а) Од независноста на $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ имаме,

$$f_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}f_{\xi_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{t^2}{2}}=e^{-\frac{nt^2}{2}},$$

па карактеристичната функција на η_n е

$$f_{\eta_n}(t)=f_{\frac{1}{\sqrt{n}}(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)}(t)=f_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})=e^{-\frac{n}{2}(\frac{t}{\sqrt{n}})^2}=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

од каде следува дека $\eta_n : N(0,1^2)$.

7. Нека $f_\xi(t)$ е карактеристичната функција за случајната големина ξ. Да се изрази збирот $D(\sin\xi)+D(\cos\xi)$ преку $f_\xi(1)$.

Одговор: $D(\sin\xi)+D(\cos\xi)=1-|f_\xi(1)|^2$

8. Нека случајниот вектор (ξ,η) има $U(K)$, каде $K=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$. Да се најде карактеристичната функција $f_\mu(t)$ за случајната големина $\mu = arctg\,\frac{\eta}{\xi}$.

Решение:

Од $(\xi,\eta):U(K)$ и $m(K)=1^2\pi=\pi$, следува дека густината на распределба на (ξ,η) е

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & ,(x,y)\in K\\ 0 & ,(x,y)\notin K\end{cases}$$

Распределбата на случајниот вектор (μ,ν), каде $\mu = arctg\,\frac{\eta}{\xi}$, $\nu=\xi$, односно $\xi=\nu$, $\eta=\nu\,tg\mu$ и $J(\mu,\nu)=-\frac{\nu}{\cos^2\mu}$ е

$$p_{\mu\nu}(u,v)=p_{\xi\eta}(\xi(u,v),\eta(u,v))\cdot|J(u,v)|=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{|v|}{\cos^2 u},\ \text{за}\ v^2+v^2tg^2u\le 1,$$

од каде маргиналната распределба на μ е

$$p_\mu(u)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\mu\nu}(u,v)\,dv=\int_{v^2+v^2tg^2u\le 1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{|v|}{\cos^2 u}\,dv=\frac{1}{2\pi},\ \text{за}\ 0<u<2\pi,$$

значи $\mu:U(0,2\pi)$, од каде нејзината карактеристична функција е

$$f_\mu(t)=\frac{e^{it2\pi}-1}{it2\pi}.$$

3. Конвергенција на низи од случајни променливи

Нека $X_1,X_2,\ldots$ е низа од случајни пронемливи и X е случајна променлива дефинирани над ист простор на веројатност.

1) Низата $X_1,X_2,\ldots$ **конвергира по распределба (или слабо конвергира)** кон X, ако $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$, каде $F_n(x)$ е функција на распределба на случајната променлива X_n, $n=1,2,\ldots$, додека $F(x)$ е функција на распределба на случајната променлива X. Ознака: $X_n\Rightarrow X$.

2) Низата $X_1,X_2,\ldots$ **конвергира по веројатност** кон X, ако за секој $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}=0$. Ознака: $X_n\xrightarrow{P}X$.

3) Низата $X_1,X_2,\ldots$ **конвергира скоро сигурно (или со веројатност 1)** кон X, ако $P\{\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X\}=1$. Ознака: $X_n\xrightarrow{c.c.}X$.

4) Низата $X_1,X_2,\ldots$ **конвергира средно квадратно (во средно со ред r=2)** кон X, ако $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n-X)^2=0$. Ознака: $X_n\xrightarrow{2}X$.

Лема на Борел-Кантели. Нека $\{A_n\}$ е низа од случајни настани. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, тогаш $P\{w : w \in A_n \text{ за бесконечно многу } n\} = 0$.

Својства.

1) $X_n \xrightarrow{c.c.} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{P} X$

2) $X_n \xrightarrow{2} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{P} X$

3) $X_n \xrightarrow{P} X \;\Rightarrow\; X_n \Rightarrow X$

1. Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots$ се независни случајни големини со закони на распределба

ξ_n	$-n$	0	n
p	$\frac{3}{(n+1)^2}$	$1-\frac{5}{(n+1)^2}$	$\frac{2}{(n+1)^2}$

, $n = 2, 3, \ldots$

Да се испитаат сите четири вида на конвергенција на низата $\{\xi_n\}$.

Решение:

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно, од

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| \geq \varepsilon\} = \sum_{n=[\varepsilon]}^{\infty} (P\{\xi_n = -n\} + P\{\xi_n = n\}) = \sum_{n=[\varepsilon]}^{\infty} \frac{5}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+1)^2} < +\infty,$$

и од лемата на Борел - Кантели, следува дека

$P\{\omega : |\xi_n| \geq \varepsilon, \text{за бесконечно многу } n\} = 0$, односно

$P\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \neq 0\} = 0$, од каде $\xi_n \xrightarrow{c.c.} 0$ (низата $\{\xi_n\}$ конвергира скоро сигурно кон 0).

Од конвергенцијата скоро сигурно, следува конвергенција по веројатност, односно $\xi_n \xrightarrow{P} 0$. Од конвергенцијата по веројатност, следува конвергенција по распределба или слаба конвергенција, односно $\xi_n \Rightarrow 0$.

За испитување на средно квадратна конвергенција, се наоѓа

$$M|\xi_n - 0|^2 = M\xi_n{}^2 = (-n)^2 \cdot \frac{3}{(n+1)^2} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{5}{(n+1)^2}\right) + n^2 \cdot \frac{2}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{5n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 5 \neq 0,$$

значи низата $\{\xi_n\}$ не конвергира средно квадратно кон 0.

За $r > 0$, имаме

$$M|\xi_n - 0|^r = M|\xi_n|^r = |-n|^r \cdot \frac{3}{(n+1)^2} + 0^r \cdot \left(1 - \frac{5}{(n+1)^2}\right) + |n|^r \cdot \frac{2}{(n+1)^2} = \frac{5n^r}{(n+1)^2},$$

од каде за $0 < r < 2$, $M|\xi_n - 0|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, додека за $r > 2$, $M|\xi_n - 0|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Па значи низата $\{\xi_n\}$ конвергира во средно со ред r, $0 < r < 2$ кон 0 и $\{\xi_n\}$ не конвергира во средно со ред r, $r \geq 2$ кон 0.

2. Случајните големини ξ_n, $n=1,2,\dots$ имаат $U(0,\frac{1}{n})$ распределби, додека случајните големини η_n, $n=1,2,\dots$ се независни од ξ_n, $n=1,2,\dots$ и се зададени со законите на распределба

η_n	0	$\frac{1}{n}$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, $n=1,2,\dots$

Да се испитаат сете четири вида на конвергенција на низата $\{\mu_n\}$, каде $\mu_n=\xi_n+\eta_n$, $n=1,2,\dots$.

Решение:

Од $M\xi_n=\frac{1}{2}(0+\frac{1}{n})=\frac{1}{2n}$ и $D\xi_n=\frac{1}{12}(\frac{1}{n}-0)^2=\frac{1}{12n^2}$, имаме

$$M\xi_n{}^2=D\xi_n+(M\xi_n)^2=\frac{1}{12n^2}+(\frac{1}{2n})^2=\frac{1}{3n^2},$$

додека од $M\eta_n=0\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2n}$ и $M\eta_n{}^2=0^2\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{n})^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2n^2}$, имаме

$$D\eta_n=M\eta_n{}^2-(M\eta_n)^2=\frac{1}{2n^2}-(\frac{1}{2n})^2=\frac{1}{4n^2}.$$

Па од независноста на ξ_n и η_n, $n=1,2,\dots$ за математичкото очекување и дисперзијата на μ_n добиваме,

$$M\mu_n=M(\xi_n+\eta_n)=M\xi_n+M\eta_n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n},$$

$$D\mu_n=D(\xi_n+\eta_n)=D\xi_n+D\eta_n=\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{3n^2}.$$

Испитуваме конвергенција на низата $\{\mu_n\}$ кон 0.

Користејќи ги горедобиените бројни карактеристики за ξ_n и η_n, како и независниста на ξ_n и η_n, $n=1,2,\dots$, за средноквадратната конвергенција на $\{\mu_n\}$ кон 0, имаме

$$M\,|\,\mu_n-0|^2=M\mu_n{}^2=M(\xi_n+\eta_n)^2=M(\xi_n{}^2+2\xi_n\eta_n+\eta_n{}^2)=$$
$$=M\xi_n{}^2+2M\xi_nM\eta_n+M\eta_n{}^2=\frac{1}{3n^2}+2\cdot\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}=\frac{4}{3n^2}\to 0,\ \text{кога } n\to\infty,$$

односно $\mu_n\xrightarrow{2}0$, од каде следува дека $\mu_n\xrightarrow{P}0$, од каде пак $\mu_n\Rightarrow 0$.

Користејќи го неравенството на Чебишев, за конвергенцијата скоро сигурно на низата $\{\mu_n\}$ кон 0, имаме за $\varepsilon>0$ е произволно,

$$P\{|\,\mu_n|\ge\varepsilon\}=1-P\{|\,\mu_n|<\varepsilon\}=1-P\{-\varepsilon<\mu_n<\varepsilon\}=1-P\{-\varepsilon-\frac{1}{n}<\mu_n-\frac{1}{n}<\varepsilon-\frac{1}{n}\}\le$$
$$\le 1-P\{-\varepsilon+\frac{1}{n}<\mu_n-\frac{1}{n}<\varepsilon-\frac{1}{n}\}=1-P\{|\,\mu_n-\frac{1}{n}|<\varepsilon-\frac{1}{n}\}=1-P\{|\,\mu_n-M\mu_n|<\varepsilon-\frac{1}{n}\}=$$
$$=P\{|\,\mu_n-M\mu_n|\ge\varepsilon-\frac{1}{n}\}\le\frac{D\mu_n}{(\varepsilon-\frac{1}{n})^2}=\frac{1}{3(\varepsilon n-1)^2},\ \text{од каде}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\{|\,\mu_n|\ge\varepsilon\}\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3(\varepsilon n-1)^2}<+\infty$, па од лемата на Борел - Кантели, следува дека

$P\{\omega:|\,\mu_n|\ge\varepsilon,\ \text{за бесконечно многу } n\}=0$, односно

$P\{\omega:\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(\omega)\ne 0\}=0$, од каде $\mu_n\xrightarrow{c.c.}0$.

3. Нека е дадена низата $\xi_1, \xi_2, \ldots$ од случајни големини со исти $U(0,1)$ распределби. Покажи дека низата $(1+\frac{\xi_n}{n})^n$, $n=1,2,\ldots$ слабо конвергира кон e^{ξ_1}.

Решение:

I начин: Од $\xi_n : U(0,1)$ за густината на распределба на ξ_n имаме,

$$p_{\xi_n}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \notin (0,1) \end{cases}, \ n = 1, 2, \ldots,$$

па функцијата на распределба на e^{ξ_1}

$$F_{e^{\xi_1}}(x) = P\{e^{\xi_1} \le x\} = P\{\xi_1 \le \ln x\} = \int_{-\infty}^{\ln x} p_{\xi_1}(u)\, du =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ln x < 0 \\ \int_0^{\ln x} du & , 0 \le \ln x < 1 \\ 1 & , \ln x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \ln x & , 1 \le x < e \\ 1 & , x \ge e \end{cases}$$

додека за функцијата на распределба на $(1+\frac{\xi_n}{n})^n$ имаме,

$$F_{(1+\frac{\xi_n}{n})^n}(x) = P\{(1+\frac{\xi_n}{n})^n \le x\} = P\{\xi_n \le n(x^{\frac{1}{n}} - 1)\} = \int_{-\infty}^{n(x^{\frac{1}{n}}-1)} p_{\xi_n}(u)\, du =$$

$$= \begin{cases} 0 & , n(x^{\frac{1}{n}} - 1) < 0 \\ \int_0^{n(x^{\frac{1}{n}}-1)} du & , 0 \le n(x^{\frac{1}{n}} - 1) < 1 \\ 1 & , n(x^{\frac{1}{n}} - 1) \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ n(x^{\frac{1}{n}} - 1) & , 1 \le x < (1+\frac{1}{n})^n \\ 1 & , x \ge (1+\frac{1}{n})^n \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \ln x & , 1 \le x < e \\ 1 & , x \ge e \end{cases},$$

значи $(1+\frac{\xi_n}{n})^n \Rightarrow e^{\xi_1}$.

II начин: Со карактеристични функции.

$$f_{(1+\frac{\xi_n}{n})^n}(t) = Me^{it(1+\frac{\xi_n}{n})^n} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(1+\frac{x}{n})^n} p_{\xi_n}(x)\, dx = \int_0^1 e^{it(1+\frac{x}{n})^n} dx \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$\to \int_0^1 e^{ite^x} dx = Me^{ite^{\xi_1}} = f_{e^{\xi_1}}(t)$, од каде $F_{(1+\frac{\xi_n}{n})^n}(x) \to F_{e^{\xi_1}}(x)$ по точки, односно $(1+\frac{\xi_n}{n})^n \Rightarrow e^{\xi_1}$.

4. Докажи дека ако за низата $\xi_1, \xi_2, \ldots$ важи $a \le \xi_n \le b$, каде $-\infty < a < b < +\infty$, за $n = 1, 2, \ldots$ и ако $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, тогаш $\xi_n \xrightarrow{2} \xi$.

Решение:

Од $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $a \le \xi_n \le b$, за $n = 1, 2, \ldots$, следува дека $a \le \xi \le b$. Понатаму, за $\varepsilon > 0$ произволно,

$$(\xi_n - \xi)^2 = (\xi_n - \xi)^2 I_{\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}} + (\xi_n - \xi)^2 I_{\{|\xi_n - \xi| \ge \varepsilon\}} \le$$

$$\le \varepsilon^2 I_{\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}} + (b-a)^2 I_{\{|\xi_n - \xi| \ge \varepsilon\}} \le \varepsilon^2 + (b-a)^2 I_{\{|\xi_n - \xi| \ge \varepsilon\}},$$

па тогаш,

$$M(\xi_n-\xi)^2 \le M(\varepsilon^2+(b-a)^2 I_{\{|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\}}) = \varepsilon^2+(b-a)^2 P\{|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon^2,$$

затоа што од $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, следува дека $P\{|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Бидејќи $\varepsilon>0$ е произволно, може да го одбереме така да $\varepsilon\to 0$ и тогаш

$M(\xi_n-\xi)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, од каде $\xi_n \xrightarrow{2} \xi$.

5. Нека е дадена низата $\xi_1,\xi_2,\ldots$ од независни случајни големини со густини на распределба $p_{\xi_n}(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$, $x>0$. Дали за низата $\{\xi_n\}$ важи законот на големи броеви ?

Решение:

Математичкото очекување на ξ_n е

$$M\xi_n=\int_0^\infty x\cdot\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx=\frac{1}{n!}I_{n+1},$$

каде $I_n=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n!$, па тогаш

$$M\xi_n=\frac{1}{n!}I_{n+1}=\frac{1}{n!}(n+1)!=n+1.$$

Воведуваме нови случајни големини

$$\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n M\xi_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\xi_k-\frac{(n+1)(n+2)}{2n},\ n=1,2,\ldots$$

и ако покажеме дека низата $\{\eta_n\}$ конвергира по веројатност, односно скоро сигурно кон 0, тогаш за низата $\{\xi_n\}$ важи слабиот, односно силниот закон на големи броеви.

Карактеристичните гункции на ξ_n се

$$f_{\xi_n}(t)=Me^{it\xi_n}=\int_0^\infty e^{itx}\cdot\frac{x^n}{n!}e^{-x}dx=\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{(it-1)x}dx=\frac{1}{n!}J_n,$$

каде $J_n=\int_0^\infty x^n e^{(it-1)x}dx=\frac{n!}{(1-it)^{n+1}}$, па тогаш

$$f_{\xi_n}(t)=\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{(1-it)^{n+1}}=\frac{1}{(1-it)^{n+1}}.$$

Од $\xi_1,\xi_2,\ldots$ независни имаме,

$$f_{\sum_{k=1}^n\xi_k}(t)=\prod_{k=1}^n f_{\xi_k}(t)=\frac{1}{(1-it)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}},\text{ од каде}$$

$$f_{\eta_n}(t)=e^{-it\frac{(n+1)(n+2)}{2n}}\cdot f_{\sum_{k=1}^n\xi_k}\left(\frac{t}{n}\right)=e^{-it\frac{(n+1)(n+2)}{2n}}\cdot\frac{1}{(1-i\frac{t}{n})^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}},\text{ од каде}$$

$$\ln f_{\eta_n}(t)=-it\,\frac{(n+1)(n+2)}{2n}-\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ln\left(1-i\,\frac{t}{n}\right)=$$

$$=-it\,\frac{(n+1)(n+2)}{2n}-\frac{(n+1)(n+2)}{2}\left(-i\frac{t}{n}-\frac{1}{2}\left(i\frac{t}{n}\right)^2-o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$$

$$= -it\frac{(n+1)(n+2)}{2n} + it\frac{(n+1)(n+2)}{2n} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n^2}\frac{(n+1)(n+2)}{2} + o(\frac{1}{n^2}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^2}{n^2}\frac{(n+1)(n+2)}{2} + o(\frac{1}{n^2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{t^2}{4},$$

односно

$$f_{\eta_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{4}}, \text{ па } \eta_n \Rightarrow \mu, \text{ каде } \mu : N(0,\tfrac{1}{2}).$$

Значи низата $\{\eta_n\}$ не конвергира по распределба кон 0, па таа не конвергира ни по веројатност кон 0 и не конвергира скоро сигурно кон 0. Па, за низата $\{\xi_n\}$ не важи законот на големи броеви.

6. Дадена е низата од независни случајни големини $\xi_1, \xi_2, \ldots$, така што ξ_n има χ_n^2 распределба, $n = 1, 2, \ldots$ и $\eta_n = \frac{\xi_n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Докажи дека низата $\{\eta_n\}$ конвергира по веројатност кон 1.

Решение:

I начин: Ако $\xi_n : \chi_n^2$, значи дека ξ_n имаат Гама распределба со параметри $\alpha = \frac{n}{2}$ и $\lambda = \frac{1}{2}$, односно нивните густини на распределба се

$$p_{\xi_n}(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}, \ x \geq 0, \text{ од каде } M\xi_n = n \text{ и } D\xi_n = 2n.$$

Тогаш од неравенството на Чебишев имаме,

$$P\{|\eta_n - 1| > \varepsilon\} = P\{|\frac{\xi_n}{n} - 1| > \varepsilon\} = P\{|\xi_n - n| > n\varepsilon\} \leq \frac{D\xi_n}{(n\varepsilon)^2} = \frac{2n}{(n\varepsilon)^2} = \frac{2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

односно $\eta_n \xrightarrow{P} 1$.

II начин: Ако $\xi_n : \chi_n^2$, тогаш $\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k{}^2$, каде $\mu_k : N(0,1^2)$ и μ_k, $k = 1, \ldots, n$ се независнислучајни големини. Тогаш,

$$\eta_n = \frac{\xi_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k{}^2 .$$

Од μ_k, $k = 1, \ldots, n$ независни и еднакво распределени, следува дека и $\mu_k{}^2$, $k = 1, \ldots, n$ се независни и еднакво распределени и бидејќи

$$M\mu_k{}^2 = D\mu_k + (M\mu_k)^2 = 1 + 0^2 = 1 < \infty,$$

исполнети се условите од теоремата на Хинчин, па следува дека $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k{}^2 \xrightarrow{P} 1$, односно $\eta_n \xrightarrow{P} 1$.

4. Централна гранична теорема

Нека $X_1, X_2, \ldots$ се независни и еднакво распределени сличајни променливи со $EX_k = a$ и $DX_k = \sigma^2$, $k = 1, 2, \ldots$, тогаш за $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{X_1+...+X_n-na}{\sigma\cdot\sqrt{n}} < x\} = \frac{1}{2} + \Phi_0(x),$$

каде $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du$ е интегралот на Лаплас.

1. Случајната големина ξ е аритметичка средина на 3200 независни и еднакво распределени случајни големини со математичко очекување 3 и дисперзија 2. Да се најде веројатноста $P\{\xi \in (2{,}95; 3{,}075)\}$.

Решение:

Нека $\xi = \frac{1}{3200}\sum_{k=1}^{3200}\xi_k$, каде ξ_k, $k = 1, \dots, 3200$ се независни и еднакво распределени случајни големини со $M\xi_k = 3$ и $D\xi_k = 2$, $k = 1, \dots, 3200$, тогаш за ξ_k, $k = 1, \dots, 3200$ ја користиме централната гранична теорема, па имаме

$$P\{\xi \in (2{,}95; 3{,}075)\} = P\{2{,}95 < \xi < 3{,}075\} = P\{2{,}95 < \frac{1}{3200}\sum_{k=1}^{3200}\xi_k < 3{,}075\} =$$

$$= P\{9440 < \sum_{k=1}^{3200}\xi_k < 9840\} = P\{\frac{9440-3200\cdot3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3200}} < \frac{\sum_{k=1}^{3200}\xi_k - 3200\cdot3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3200}} < \frac{9840-3200\cdot3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3200}}\} =$$

$$= P\{-2 < \frac{\sum_{k=1}^{3200}\xi_k - 3200\cdot3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3200}} < 3\} \approx \Phi_0(3) - \Phi_0(-2) = 0{,}49865 + 0{,}47725 = 0{,}97590,$$

каде $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$ е функцијата на Лаплас, чии вредности се читаат од таблица.

2. Со примена на централна гранична теорема докажи дека $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Решение:

Нека $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ се независни и еднакво распределени случајни големини со $P(1)$ распределби. Нека $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, тогаш η_n има исто така Поасонова распределба, но со параметар n, односно $\eta_n : P(n)$, од каде законот на распределба на η_n е

$$P\{\eta_n = k\} = \frac{n^k}{k!}e^{-n},\ k = 0, 1, \dots,$$

тогаш

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = P\{0 \le \eta_n \le n\} = P\{\frac{0-n\cdot1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{n}} \le \frac{\eta_n - n\cdot1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{n}} \le \frac{n-n\cdot1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{n}}\} = P\{-\sqrt{n} \le \frac{\eta_n - n\cdot1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{n}} \le 0\} \approx$$

$$\approx \Phi_0(0) - \Phi_0(-\sqrt{n}) = \Phi_0(0) + \Phi_0(\sqrt{n}) = \Phi_0(\sqrt{n}) \to \frac{1}{2},\ \text{кога}\ n \to \infty,$$

што требаше да се докаже.

3. Во еден процес на собирање, броевите се заокружуваат на најблискиот цел број. Претпоставуваме дека грешките на заокружување се независни и рамномерно распределени на $(-0{,}5; 0{,}5)$.

а) Ако се собираат 1500 броеви, колкава е веројатноста дека апсолутната вредност на вкупната грешка ќе надмине 15 ?

б) Колку најмногу броеви може да се соберат, за да со веројатност 0,9, апсолутната вредност на вкупната грешка биде помала од 10 ?

Решение:

Нека ξ_k е грешката на заокружување на k -тиот број, $k=1,\ldots,n$ тогаш ξ_k, $k=1,\ldots,n$ се независни и еднакво распределени случајни големини со $U(-0{,}5; 0{,}5)$ распределби, од каде $M\xi_k = \frac{-0{,}5+0{,}5}{2} = 0$ и $D\xi_k = \frac{(0{,}5+0{,}5)^2}{12} = \frac{1}{12}$, $k=1,\ldots,n$. Вкупната грешка е $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

а) Ако $n=1500$, се бара веројатноста

$$P\{|\eta_{1500}| > 15\} = 1 - P\{|\eta_{1500}| \le 15\} = 1 - P\{-15 \le \eta_{1500} \le 15\} =$$

$$= 1 - P\{\frac{-15-1500\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{1500}} \le \frac{\eta_{1500}-1500\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{1500}} \le \frac{15-1500\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{1500}}\} \approx 1 - \Phi_0(\frac{15-1500\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{1500}}) + \Phi_0(\frac{-15-1500\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{1500}}) =$$

$$= 1 - 2\Phi_0(\frac{3}{\sqrt{5}}) = 1 - 2\Phi_0(1{,}34) = 1 - 2\cdot 0{,}40988 = 0{,}18024 .$$

б) Се бара n за кое $P\{|\eta_n| < 10\} = 0{,}9$, од каде со примена на централната гранична теорема, добиваме

$$0{,}9 = P\{-10 < \eta_n < 10\} = P\{\frac{-10-n\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{n}} < \frac{\eta_n - n\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{n}} < \frac{10-n\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{n}}\} =$$

$$= \Phi_0(\frac{10-n\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{n}}) - \Phi_0(\frac{-10-n\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{n}}) = 2\Phi_0(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}) ,$$

од каде $\Phi_0(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}) = 0{,}45$, па од таблица се наоѓа дека $\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}} = 1{,}645$ за да конечно $n = 441$.

4. Во 100 кутии се распределени црни и бели топчиња. Бројот на црни топчиња по кутија е случајна големина со $P(1)$ распределба. Да се најде веројатноста дека вкупниот број на црни топчиња во сите 100 кутии е поголем од 120.

Одговор: $p = 0{,}02275$.