ОСНОВИ НА ВЕРОЈАТНОСТ & ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА

V. ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ

Проф. д-р Ирена Стојковска,
Институт за математика,
Природно-математички факултет,
УКИМ, Скопје

E-mail: irena.stojkovska@gmail.com

1. Гранични теореми во Бернулиевата шема

Кај Бенулиевата шема, дефинирана во делот 6.1, разгледуваме серија од n независни експерименти, при што, се разгледува појавувањето на настан A, кој секој пат се реализира со веројатност $p = P(A)$. Тогаш, случајната променлива X - број на реализации на настанот A во серија со n независни експерименти има биномна распределба $\mathcal{B}(n, p)$, дадена со законот на распределба

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, ..., n. \tag{16.1}$$

При големи вредности на n, се соочуваме со потешкотии при пресметувањето на веројатностите (16.1). Овие тешкотии стануваат уште поголеми, при пресметување на веројатностите од облик

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{16.2}$$

1. Гранични теореми во Бернулиевата шема

- Во пракса се користи за ретки настани np<10 и големи вредности n>=100

Теорема 16.1 (**Теорема на Поасон**). *Нека* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, *тогаш за* $k = 0, 1, \ldots$ *важи*

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{a^k}{k!}\, e^{-a},$$

кога $n \to \infty$, $p \to 0$ *и* $np \to a$.

- За np>=10 и n(1-p)>=10

Теорема 16.2 (**Локална теорема на Моавр - Лаплас**). *Нека* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, *тогаш за* $k = 0, 1, \ldots$ *важи*

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big)$$

кога $n \to \infty$, *каде* $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$, *и* $\alpha_n \sim \beta_n$ *означува дека* $\alpha_n / \beta_n \to 1$, *кога* $n \to \infty$.

1. Гранични теореми во Бернулиевата шема

Теорема 16.3 (Интегрална теорема на Моавр - Лаплас). *Нека* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, *тогаш*

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} \to \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

кога $n \to \infty$, *каде* $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$.

Резиме (IV.8-9, V.1)

- Карактеристични функции (дефиниција, својства, карактеристични функции на поважни распределби, инверзна формула на карактеристична функција, примена на карактеристични функции)
- Повеќедимензионална нормална распределба
- Гранични теореми во Бернулиевата шема (Теорема на Пуасон, Локална теорема на Моавр-Лаплас, Интегрална теорема на Моавр-Лаплас)

2. Видови конвергенции на низи од случајни променливи

Низата (Xn) конвергира по точки кон X, ако $\lim_{n\to\propto} Xn(w) = X(w)$, за секој елементарен настан w.

Дефиниција 17.1. Низата случајни променливи (X_n) **конвергира по веројатност** кон случајната променлива X, ако

$$\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\{w : |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\} = 0. \tag{17.1}$$

Означуваме $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$.

Дефиниција 17.2. Низата случајни променливи (X_n) **конвергира скоро случајно** (или **конвергира со веројатност 1**) кон случајната променлива X, ако

$$P\{w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\} = 1. \tag{17.2}$$

Означуваме $X_n \xrightarrow{\text{с.с.}} X$, $n \to \infty$.

2. Видови конвергенции на низи од случајни променливи

Дефиниција 17.3. Низата случајни променливи (X_n) **конвергира во средно со ред** r, каде $0 < r < +\infty$ кон случајната променлива X, ако

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^r = 0. \tag{17.3}$$

Означуваме $X_n \xrightarrow{r} X$, $n \to \infty$. Кога $r = 2$ таа конвергенција ја нарекуваме **средно квадратна конвергенција** и ја означуваме уште и со $X_n \overset{\text{с.к.}}{\to} X$, $n \to \infty$.

Дефиниција 17.4. Низата случајни променливи (X_n), со соодветни функции на распределба $F_{X_n}(x)$, **конвергира по распределба (или слабо конвергира)** кон случајната променлива X, ако

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(x), \tag{17.4}$$

во сите точки на непрекинатост x на функцијата на распределба $F(x)$ на X. Означуваме $X_n \Rightarrow X$, $n \to \infty$ или $X_n \overset{dist.}{\to} X$, $n \to \infty$.

2. Видови конвергенции на низи од случајни променливи

Теорема 17.1. *Низата случајни променливи* (X_n) *конвергира скоро сигурно кон случајната променлива* X *ако и само ако за секој* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{w : \sup_{k\geq n} |X_k(w) - X(w)| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Теорема 17.2. *Ако за секое* $\varepsilon > 0$ *важи*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{w : |X_k(w) - X(w)| > \varepsilon\} < +\infty,$$

тогаш низата случајни променливи (X_n) *конвергира скоро сигурно кон случајната променлива* X.

2. Видови конвергенции на низи од случајни променливи

$$A^* = \{w : w \in A_k \text{ за бесконечно многу } k\}.$$

Теорема 17.3 **(Лема на Борел-Кантели).** *а) Нека* (A_n) *е произволна низа од настани и* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$*, тогаш важи равенството*

$$P(A^*) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0.$$

б) Нека (A_n) *е низа од независни настани и* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$*, тогаш важи равенството*

$$P(A^*) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1.$$

2. Видови конвергенции на низи од случајни променливи

Последица 17.1. *Нека* (A_n) *е низа од независни настани. Тогаш важи*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=0 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<+\infty.$$

Теорема 17.4. *Нека* (X_n) *е низа од независни случајни променливи. Тогаш важи*

$$X_n \overset{\text{с.с.}}{\to} X,\ n\to\infty \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\sum_{n=1}^{\infty}P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}<+\infty.$$

2. Видови конвергенции на низи од случајни променливи

- Врски меѓу разните видови конвергенција

Теорема 17.5. *Нека (X_n) е произволна низа од случајни променливи. Тогаш важи*

$$X_n \xrightarrow{\text{с.с.}} X,\ n \to \infty \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X,\ n \to \infty.$$

Теорема 17.6. *Нека (X_n) е произволна низа од случајни променливи. Тогаш важи*

$$X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X,\ n \to \infty \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X,\ n \to \infty.$$

Теорема 17.7. *Нека (X_n) е произволна низа од случајни променливи. Тогаш важи*

$$X_n \xrightarrow{P} X,\ n \to \infty \Longrightarrow X_n \Rightarrow X,\ n \to \infty.$$

2. Видови конвергенции на низи од случајни променливи

- Врски меѓу конвергенцијата по веројатност и скоро сигурната конвергенција

Теорема 17.8. *Нека* (X_n) *е низа од случајни променливи дефинирана над дискретниот простор на веројатност* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Нека* (X_n) *конвергира по веројатност кон случајната променлива* X. *Тогаш, низата* (X_n) *конвергира скоро сигурно кон случајната променлива* X.

Теорема 17.9. *Ако* $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$, *тогаш постои подниза* (X_{n_k}) *така да* $X_{n_k} \xrightarrow{\text{с.с.}} X$, $k \to \infty$.

2. Видови конвергенции на низи од случајни променливи

- Слаба конверхенција и Теорема за непрекинатост

Теорема 17.10 (Теорема за непрекинатост). *Нека (X_n) е произволна низа од случајни променливи и нека (φ_n) е соодветната низа од карактеристични функции.*
а) Ако $X_n \Rightarrow X$, $n \to \infty$, каде X е случајна променлива со карактеристична функција $\varphi(t)$, тогаш за секој $t \in \mathbb{R}$важи $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$.
б) Ако за секој $t \in \mathbb{R}$ постои $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, и ако $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ е непрекината во нулата, тогаш $\varphi(t)$ е карактеристична функција на некоја случајна променлива X и важи $X_n \Rightarrow X$, $n \to \infty$.

Пример 17.1 (Карактеристична функција на Гама распределба). ...

3. Закон нула или еден на Колмогоров

$$A = \left\{ w : \text{редот} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(w) \text{ конвергира} \right\}. \tag{18.1}$$

За $1 \leq n \leq m$ ја означуваме со $\mathcal{F}_n^{n+m}$ σ-алгебрата генерирана од случајните променливи $X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+m}$, односно минималната σ-алгебра која ги содржи настаните од облик

$$\{w : X_n(w) \leq x_n, X_{n+1}(w) \leq x_{n+1}, ..., X_{n+m}(w) \leq x_{n+m}\},$$

каде $x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ се реални броеви. Тогаш, $\mathcal{F}_n^n \subset \mathcal{F}_n^{n+1} \subset \mathcal{F}_n^{n+2} \subset ....$ Нека $\mathcal{F}_n^{\infty}$ е σ-алгебрата генерирана од алгебрата $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^{n+k}$. Тогаш, $\mathcal{F}_1^{\infty} \supset \mathcal{F}_2^{\infty} \supset \mathcal{F}_3^{\infty} \supset ....$ Конечно, $\mathcal{F}_{\infty}^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^{\infty}$ се нарекува **σ-алгебра генерирана од опашката на низата случајни променливи** (X_n).

3. Закон нула или еден на Колмогоров

Теорема 18.2 (Закон нула или еден на Колмогоров). *Нека* (X_n) *е низа од независни случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *и нека* $\mathcal{F}_\infty^\infty$ *е* σ*-алгебра генерирана од опашката на таа низа. Тогаш,*
а) веројатноста на секој настан од $\mathcal{F}_\infty^\infty$ *е еднаква на 0 или на 1,*
б) ако $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *е функција за која важи* $\sigma(X) \subset \mathcal{F}_\infty^\infty$*, тогаш постои константа* c*, така да важи* $P\{X = c\} = 1$.

Забелешка. За настанот A дефиниран со (18.1) имаме дека $A \in \mathcal{F}_\infty^\infty$, па од Теорема 18.2 следи дека веројатноста на настанот A е или 0 или 1.

Забелешка. Нека (A_n) е низа од независни настани и (X_n) е низата од индикатори на тие настани. Настанот $A^* = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k$ е настан кој припаѓа на σ-алгебрата генерирана од опашката на низата (X_n). Па, според Теорема 18.2 следи дека веројатноста на настанот A^* е или 0 или 1. Лемата на Борел-Кантели (Теорема 17.3) ги одредува условите под кои таа веројатност е 0 или 1.

4. Закон на големите броеви

Нека (X_n) е низа од случајни променливи дефинирани на ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Не интересира конвергенцијата на низата од парцијални суми $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Ако постојат низи од реални броеви (a_n) и (b_n), така да $b_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ и

$$\frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - a_n\right) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty, \tag{19.1}$$

тогаш велиме дека за низата случајни променливи (X_n) важи **слабиот закон на големите броеви**. Во текстот кој следи ќе го разгледаме случајот $a_n = E(S_n)$ и $b_n = n$.

4. Закон на големите броеви

Теорема 19.1 (Закон на големите броеви на Чебишев). *Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи и нека $C > 0$ е константа така да за секој природен број n важи $DX_n \leq C$. Ако $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, тогаш важи*

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема 19.2 (Закон на големите броеви на Хинчин). *Нека (X_n) е низа од независни и еднакво распределени случајни променливи со конечни математички очекувања еднакви на m. Тогаш,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} m, \quad n \to \infty.$$

4. Закон на големите броеви

Нека (X_n) е низа од случајни променливи дефинирани на ист простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ако

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} EX_k\right) \xrightarrow{\text{с.с.}} 0, \quad n \to \infty, \tag{19.2}$$

тогаш велиме дека за низата случајни променливи (X_n) важи **силниот закон на големите броеви.**

4. Закон на големите броеви

Теорема 19.4 (Закон на големите броеви на Колмогоров). *Нека* (X_n) *е низа од независни случајни променливи така да* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < +\infty$. *Тогаш,*

$$P\left\{\lim_{n\to} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) = 0\right\} = 1.$$

Последица 19.1. *Нека* (X_n) *е низа од независни и еднакво распределени случајни променливи при што* $EX_1 = m < +\infty$. *Тогаш,*

$$P\left\{\lim_{n\to} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = m\right\} = 1.$$

Пример 19.1 (Законот на големите броеви применет кај релативната фрекфенција како оценка за веројатноста на настанот). ...

5. Централна гранична теорема

Теорема 20.1 (Централна гранична теорема.). *Нека* (X_n) *е низа од независни и еднакво распределени случајни променливи со математичко очекување* $E(X_1) = m$ *и конечна дисперзија* $D(X_1) = \sigma^2 > 0$. *Нека* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, *тогаш за секој* $x \in \mathbb{R}$ *важи*

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du, \quad n \to \infty$$

односно

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \overset{dist.}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty.$$