

Департман менаџмент,
Економски факултет, УКИМ, Скопје
(учебна 2020/2021 година – зимски семестар)

ОПЕРАЦИОНИ ИСТРАЖУВАЊА

- МОДЕЛИ НА КОНТРОЛА НА ЗАЛИХИ -

Проф. д-р Ирена Стојковска,
Институт за математика,
Природно-математички факултет,
УКИМ, Скопје

E-mail: irena.stojkovska@gmail.com

Web: <https://nastava-istojkovska.weebly.com/>

Модели на контрола на залихи

- Менаџерите добро ја знаат важноста на успешната контрола на залихи. Целта на компаниите е да најдат рамнотежа меѓу ниското и високото ниво на залихи. И едното и другото не се посакувани.
- Залиха е секој вид на складиран ресурс кој се користи за да задоволи моментални или идни потреби.
- Сите организации имаат некој систем за планирање и контрола на залихите. Проучувањето на начинот на кој компаниите ги контролираат своите залихи е еквивалентно со проучувањето како тие постигнуваат да ги набават потребните средства и да ги задоволат потребите на корисниците. Залихите се тие кои ги обединуваат во една целина сите функции и сектори на компанијата.

Компоненти на планирањето и контролата на залихи



- Основни компоненти на планирањето и контролата на залихи се:
 - планирање што да се сочува и како да се добие (дали да се произведе или да се набави)
 - предвидување на побарувачката
 - контрола на нивото на залихи (обезбедување и одржување на потребното ниво на залихи)
 - провратни информации и ревизија на планирањата и предвидувањата

Важноста на контролата на залихи

1. Раздвојувачка функција (Decoupling)

Обезбедување на одредено ниво на независност меѓу процесите со складирање на залихи за секој од процесите.

2. Складирање на ресурси

Залихите може да се користат и за складирање на сезонски производи чија побарувачка е во текот на целата година. Производите може да се складираат и како суров материјал и како готов производ.

3. Нередовно снабдување и побарувачка

Кога снабдувањето или побарувачката се нередовни, залихите може да бидат од голема полза.

4. Попусти на количини (Discounts)

Друга предност на залихите е можноста да се понудат попусти на количини.

5. Избегнување на недостаток на залихи

Незадоволството на корисниците може да биде висока цена за немањето на вистинскиот производ во вистинско време.

Одлуки при контролата на залихи

- Две основни одлуки при контролата на залихи:
 1. Колку да се нарача/произведе
 2. Кога да се нарача/произведе
- Потребно воспоставување на рамнотежа на нивото на залихи.
- Контролата се состои во минимизирање на вкупниот трошок кој се состои од:
 1. Трошок на производите (набавка или производство, обезбедување на залихите – purchasing or material cost)
 2. Трошок за нарачка (главно не зависи од количината на нарачка – ordering cost)
 3. Трошок за чување на залихите (зависи од количината на залихи – holding cost)
 4. Трошок за недостаток на залихи (трошок за загубена продажба и трошок за незадоволство на корисниците – stockouts cost)

Модел на економска нарачка на количини (EOQ – Economic Order Quantity Model)

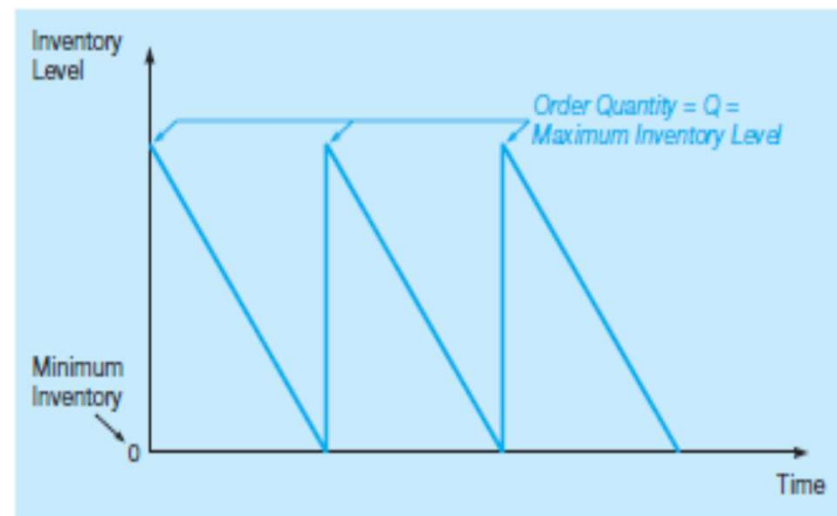
- EOQ моделот е еден од најстарите модели. Се користи уште од 1915 година (Ford. W. Harris). Тој е лесен за користење затоа што е едноставен.
- **Претпоставки на EOQ моделот:**
 1. Побарувачката е позната и константна.
 2. Времето за достава (lead time) – времето меѓу поставување на нарачката и пристигнувањето на залихите, е познато и константно.
 3. Пристигнувањето на залихите е моментално, нарачаните залихи пристигнуваат одеднаш во еден момент на времето.
 4. Цената за набавка за единица производ е константна. Попуст на количини не се дозволени.

Модел на економска нарачка на количини (EOQ – Economic Order Quantity Model)

5. Единствениот варијабилен трошок е трошокот за нарачка и трошокот за чување на залихите. Цената за чување на единица од производот и цената за поставување на една нарачка се константни.

6. Нарачките се поставуваат така што недостатоците на залихи целосно се избегнуваат.

Со измени во некои од ови претпоставки, настануваат модификации на EOQ моделот.



Q – количина која се нарачува (ед.)

Модел на економска нарачка на количини (EOQ – Economic Order Quantity Model)

Q – количина која се нарачува (ед.)

D – побарувачка (ед.) за една година

C_o – трошок за една нарачка (п.е.)

C_h – трошок за чување на единица производ (п.е.) за една година

$$\text{Годишен тошок за нарачка} = (D / Q) C_o$$

$$\text{Просечно ниво на залихи за една година} = Q / 2$$

$$\text{Годишен трошок за чување на залихите} = (Q / 2) C_h$$

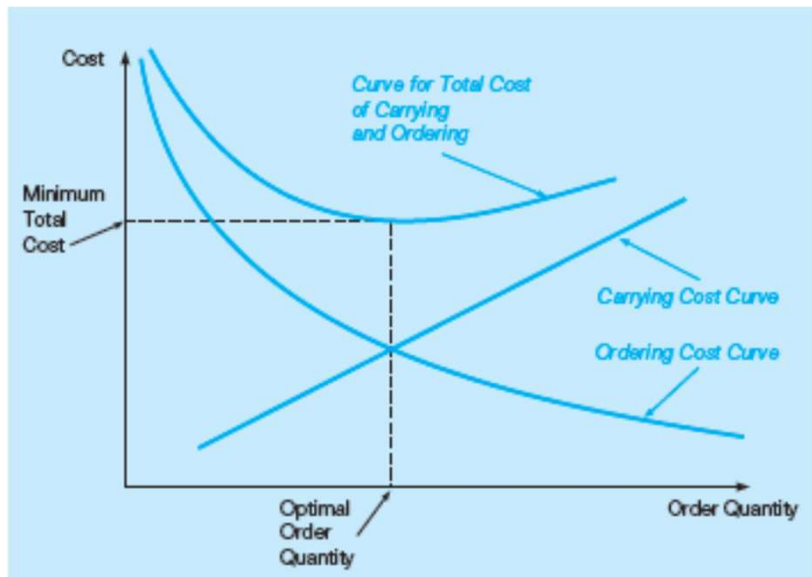
$TC(Q)$ – вкупен трошок (п.е.) за нарачка и чување на залихите за една година

$$TC(Q) = \frac{D}{Q} C_o + \frac{Q}{2} C_h$$

Модел на економска нарачка на количини (EOQ – Economic Order Quantity Model)

- Наоѓање на оптималната количина на нарачка (Q^*)

1. Начин (Годишен трошок за нарачка = Годишен трошок за чување на залихи)



$$\frac{D}{Q}C_0 = \frac{Q}{2}C_h$$

$$2DC_0 = Q^2C_h$$

$$Q^2 = \frac{2DC_0}{C_h}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}}$$

Модел на економска нарачка на количини (EOQ – Economic Order Quantity Model)

2. Начин (Минимизирање на вкупниот трошок како функција од Q)

$$\begin{aligned}TC(Q) &= \frac{D}{Q}C_0 + \frac{Q}{2}C_h \\TC'(Q) &= -\frac{D}{Q^2}C_0 + \frac{C_h}{2} = 0 \\ \frac{C_h}{2} &= \frac{D}{Q^2}C_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q^2 C_h &= 2DC_0 \\ Q^2 &= \frac{2DC_0}{C_h} \\ Q^* &= \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}}\end{aligned}$$

$TC''(Q) = \frac{2D}{Q^3}C_0 > 0$ - значи функцијата $TC(Q)$ е конвексна, па таа достигнува минимум во точката Q^* во која првиот извод е еднаков на нула т.е. $TC'(Q^*)=0$

Модел на економска нарачка на количини (EOQ – Economic Order Quantity Model)

Оптимална количина за нарачка $Q^* = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}}$

Оптимален вкупен трошок

$$\begin{aligned} TC^* = TC(Q^*) &= \frac{D}{Q^*} C_0 + \frac{Q^*}{2} C_h = \sqrt{\frac{D^2 C_0^2 C_h}{2DC_0}} + \sqrt{\frac{2DC_0 C_h^2}{2^2 C_h}} = \\ &= \sqrt{\frac{DC_0 C_h}{2}} + \sqrt{\frac{DC_0 C_h}{2}} = 2\sqrt{\frac{DC_0 C_h}{2}} = \sqrt{\frac{2^2 DC_0 C_h}{2}} = \sqrt{2DC_0 C_h} \end{aligned}$$

Оптимално времетраење на еден циклус (време меѓу две последователни пристигнувања на нарачки)

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2DC_0}{D^2 C_h}} = \sqrt{\frac{2C_0}{DC_h}}$$

Модел на економска нарачка на количини (EOQ – Economic Order Quantity Model)

Пример 1. Една компанија која продава пумпи за вода на други производители, сака да го намали трошокот на залихите со одредување на оптималниот број на пумпи по нарачка. Годишната побарувачка е 1000 пумпи, трошокот за нарачка е 10 п.е. за нарачка, а просечниот трошок за чување на една пумпа е 0,50 п.е. за една година. Под претпоставка дека важат претпоставките за EOQ моделот, одреди го оптималниот број на пумпи по нарачка.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 10}{0,50}} = \sqrt{40000} = 200 \text{ пумпи}$$

Вкупниот оптимален годишен трошок е

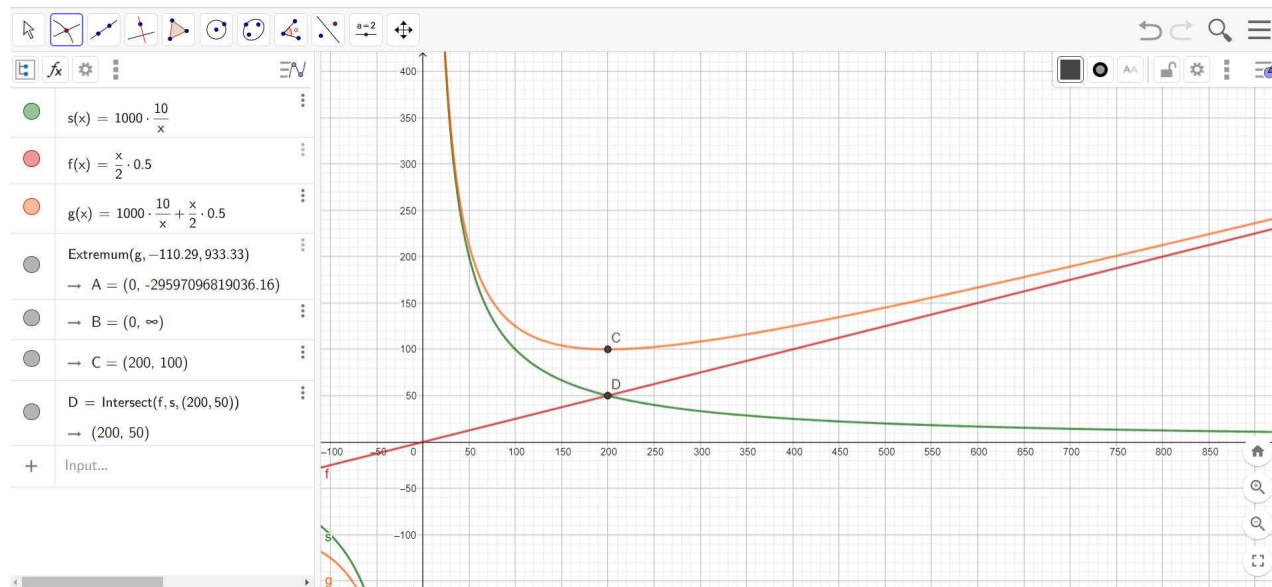
$$TC^* = \sqrt{2DC_0C_h} = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 0,50} = \sqrt{10000} = 100 \text{ п.е.}$$

Оптимален број на нарачки годишно е $D/Q^* = 1000/200 = 5$ нарачки.

Оптималното време меѓу пристигнувањето на две последователни нарачки е $T^* = Q^*/D = 200/1000 = 0,2$ години = 2,4 месеци = 72 дена.

Модел на економска нарачка на количини (EOQ – Economic Order Quantity Model)

Пример 1. GeoGebra <https://www.geogebra.org/classic>



$$Q^* = 200 \text{ пумпи, } TC^* = 100 \text{ п.е.}$$

Модел на економска нарачка на количини (EOQ – Economic Order Quantity Model)

- **Анализа на осетливоста на EOQ моделот**

Покрај тоа што EOQ моделот подразбира дека сите влезни параметри се познати и константни, пожелно е да се разбере како промените во тие параметри влијаат на промените во оптималното ниво на залихи.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}}$$

- Промените во D , C_0 или C_h ќе резултираат со помали промени во вредноста на Q^* . На пример, нека трошокот за поставување на една нарачка во **Пример 1** се зголемил од 10 п.е. на 40 п.е. (значи се зголемил 4 пати), тогаш Q^* ќе се зголеми 2 пати и ќе биде 400 пумпи, навистина:

$$Q^*_{new} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 40}{0,50}} = \sqrt{160000} = 400 \text{ пумпи}$$

Точка на повторна нарачка (ROP – Reorder Point)

- По одлуката колку да се нарача, следното прашање на кое треба да се одговори е: **кога да се нарача**. Времето помеѓу поставување на нарачката и прием на нарачката, е **време на достава на нарачката (Lead time)**.

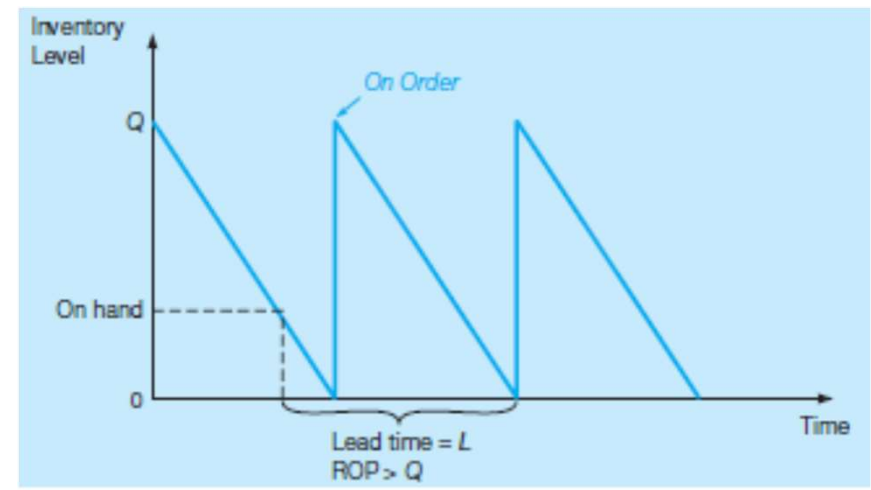
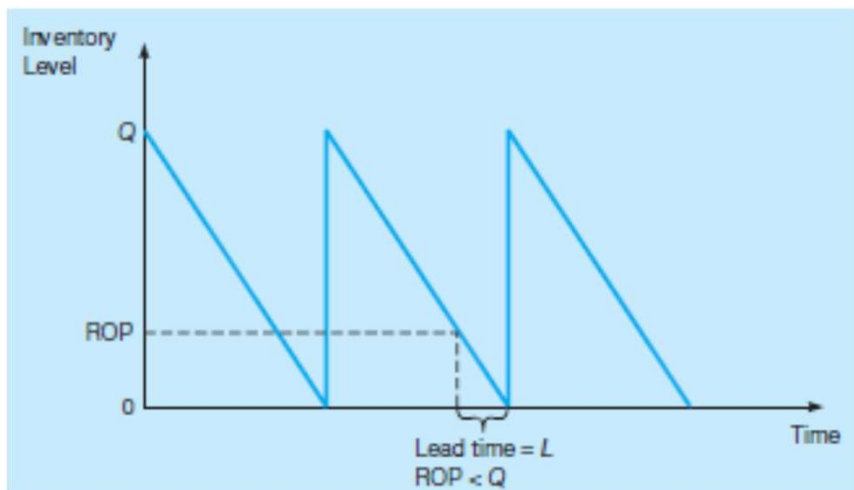
d – дневна побарувачка (ед.)

L – време за достава (Lead time) на новата нарачка во денови

- Точка на повторна нарачка: $ROP = d \cdot L$

Точка на повторна нарачка (ROP – Reorder Point)

Кога нивото на залихи ќе ја достигне точката на повторна нарачка (ROP), новата нарачка треба да се постави. Додека се чека да пристигне нарачката, побарувачката ќе биде задоволена или од моменталните залихи или од залихите кои треба да пристигнат кога нивото на залихи ќе падне на нула.



Точка на повторна нарачка (ROP – Reorder Point)

Пример 2. Една компанија има дневна побарувачка од 40 единици производ и количина на нарачка од 400 единици производ. Една нарачка се доставува за 3 дена.

$$\text{Точката на повторна натачка} = \text{ROP} = 40 \cdot 3 = 120 \text{ ед.}$$

Ова значи дека кога нивото на залихи ќе падне на 120 единици производ, нарачката треба да се постави. Бидејќи количината на нарачка е 400 единици, т.е. $\text{ROP} < Q$, тогаш ROP претставуваат моменталните залихи.

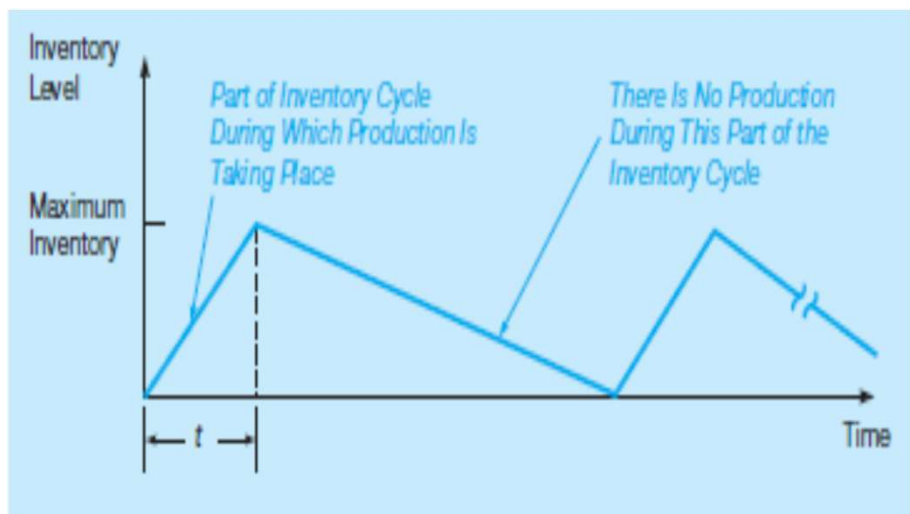
- Ако времето на достава на една нарачка е 12 дена наместо 3 дена, тогаш,

$$\text{Точката на повторна натачка} = \text{ROP} = 40 \cdot 12 = 480 \text{ ед.}$$

Бидејќи $\text{ROP} > Q$, нарачката треба да се постави кога нивото на залихи ќе достигне $\text{ROP} - Q = 480 - 400 = 80$ единици производ.

Модел на економско производство на количини (EPQ – Economic Production Quantity Model)

- Со ослабување на третата претпоставка на EOQ моделот за моментално пристигнување на залихите, добиваме нов модел во кој залихите не се надополнуваат одеднаш, туку со текот на времето, на пример при истовремено производство и продажба на производот – EPQ модел.



t – време за производство
(во денови)

Модел на економско производство на количини (EPQ – Economic Production Quantity Model)

Q – нарачана/произведена количина (ед.)

C_s – трошок за поставување (setup cost) (п.е.)

C_h – трошок за чување на единица производ за една година (п.е.)

p – дневно производство (ед.)

d – дневна побарувачка за време на процесот на производство (ед.)

t – време за производство во денови

- Вкупно производство за време на процесот на производство = $p \cdot t$
- Вкупна побарувачка за време на процесот на производство = $d \cdot t$
- Време за производство = $t = Q / p$

Модел на економско производство на количини (EPQ – Economic Production Quantity Model)

- Максимално ниво на залихи = $Q_{\max} = p \cdot t - d \cdot t = p \cdot \frac{Q}{p} - d \cdot \frac{Q}{p} = Q(1 - \frac{d}{p})$
- Просечно ниво на залихи за една година = $\frac{Q_{\max}}{2} = \frac{Q}{2}(1 - \frac{d}{p})$
- Годишен трошок за чување на залихите = $\frac{Q}{2}(1 - \frac{d}{p})C_h$
- Годишен трошок за поставување (setup cost) = $\frac{D}{Q}C_s$
- Вкупен трошок = $TC(Q) = \frac{D}{Q}C_s + \frac{Q}{2}(1 - \frac{d}{p})C_h$

Модел на економско производство на количини (EPQ – Economic Production Quantity Model)

- Наоѓање на оптимална количина на нарачка/производство (Q^*)

1. начин (Годишен трошок за чување на залихите = Годишен трошок за поставување на производството)

$$\frac{Q}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right) C_h = \frac{D}{Q} C_s$$
$$Q^2 \left(1 - \frac{d}{p}\right) C_h = 2DC_s$$

$$Q^2 = \frac{2DC_s}{\left(1 - \frac{d}{p}\right) C_h}$$
$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_s}{\left(1 - \frac{d}{p}\right) C_h}}$$

- **Забелешка:** Кај посложените модели, изедначувањето на годишниот трошок за чување и годишниот трошок за поставување не гарантира оптимално решение.

Модел на економско производство на количини (EPQ – Economic Production Quantity Model)

2. начин (Минимизирање на вкупниот трошок како функција од Q)

$$TC(Q) = \frac{D}{Q}C_s + \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right)C_h$$

$$TC'(Q) = -\frac{D}{Q^2}C_s + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right)C_h = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right)C_h = \frac{D}{Q^2}C_s$$

$$Q^2\left(1 - \frac{d}{p}\right)C_h = 2DC_s$$

$$Q^2 = \frac{2DC_s}{\left(1 - \frac{d}{p}\right)C_h}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_s}{\left(1 - \frac{d}{p}\right)C_h}}$$

$TC''(Q) = \frac{2D}{Q^3}C_s > 0$ - значи функцијата $TC(Q)$ е конвексна, па таа достигнува минимум во точката Q^* во која првиот извод е еднаков на нула т.е. $TC'(Q^*)=0$.

Модел на економско производство на количини (EPQ – Economic Production Quantity Model)

Оптимална количина на нарачка/производство = $Q^* = \sqrt{\frac{2DC_s}{(1-\frac{d}{p})C_h}}$

Оптимален вкупен трошок = $TC^* = TC(Q^*) = \sqrt{2(1-\frac{d}{p})DC_s C_h}$

Оптимално времетраење на еден циклус
(време меѓу две последователни започнувања
на производството) = $T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2C_s}{(1-\frac{d}{p})DC_h}}$

Оптимална должина на производствен процес = Q^* / p

Оптимален број на циклуси во една година = D / Q^*

Модел на економско производство на количини (EPQ – Economic Production Quantity Model)

Пример 3. Една компанија произведува фрижидери во циклуси. Компанијата проценила дека годишната побарувачка е 10000 фрижидери. Цената за поставување на производствениот процес при секој производствен циклус е 100 п.е., а трошокот за складирање е 0,50 п.е. за еден фрижидер за една година. Кога е поставен производствениот процес, дневно може да се произведат 80 фрижидери. Побарувачката за време на производствениот процес е 60 фрижидери дневно. Колку фрижидери компанијата треба да произведе за време на еден циклус? Колку ќе трае производствениот процес во рамките на еден циклус?

$D = 10000$ фрижидери годишно,

$C_s = 100$ п.е.,

$C_h = 0,50$ п.е. за фрижидер за една година,

$p = 80$ фрижидери дневно,

$d = 60$ фрижидери дневно

Модел на економско производство на количини (EPQ – Economic Production Quantity Model)

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_s}{(1-\frac{d}{p})C_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10000 \cdot 100}{(1-\frac{60}{80}) \cdot 0,50}} = \sqrt{\frac{2000000}{0,125}} = \sqrt{16000000} = 4000 \text{ фрижидери}$$

Должина на производствен процес = $Q^*/p = 4000 / 80 = 50$ дена (=t*)

Број на циклуси во една година = $D / Q^* = 10000 / 4000 = 2,5$

(т.е. три производствени процеси во текот на годината со залиха од последниот производствен процес која ќе се премесе во наредната година, и во втората година ќе бидат потребни само два производствени процеси)

Должина на еден циклус = $Q^* / D = 4000 / 10000 = 0,4$ години = 4,8 месеци =
= 144 дена

(1 година = 12 месеци, 1 месец = 30 дена)

Модел на попусти на количини (Quantity Discount Model)

- Во претпоставките на EОQ моделот (претпоставката 4) беше кажано дека не се дозволени попусти на количините. Ако дозволиме попусти, а сите други претпоставки останат непроменети, со многу мали прилагодувања на EОQ моделот сè уште ќе може да ја најдеме оптомалната количина за нарачка која ќе го минимизира вкупниот трошок за нарачка и чување на залихите.
- Кога се дозволуваат попусти на количини, трошокот за набавка (purchase cost) односно материјалниот трошок (material cost) станува релевантен трошок, затоа што зависи од количината на нарачка.

Вкупен трошок = Материјален трошок + Трошок за нарачка + Трошок за чување

$$TC(Q) = DC + \frac{D}{Q} C_0 + \frac{Q}{2} C_h$$

Модел на попусти на количини (Quantity Discount Model)

Q - количина која се нарачува (ед.)

D – годишна побарувачка (ед.)

C_o – трошок за една нарачка (п.е.)

C_h – трошок за чување на единица количина за една година (п.е.)

- Трошокот за чување на единица количина зависи од цената на единица производ, а во моделот на попусти на количини таа цена е променлива, затоа практично е тој трошок да се изрази како

$$C_h = IC$$

каде I – трошок за чување на единица количина изразен во проценти од цената C на единица производ.

Модел на попусти на количини (Quantity Discount Model)

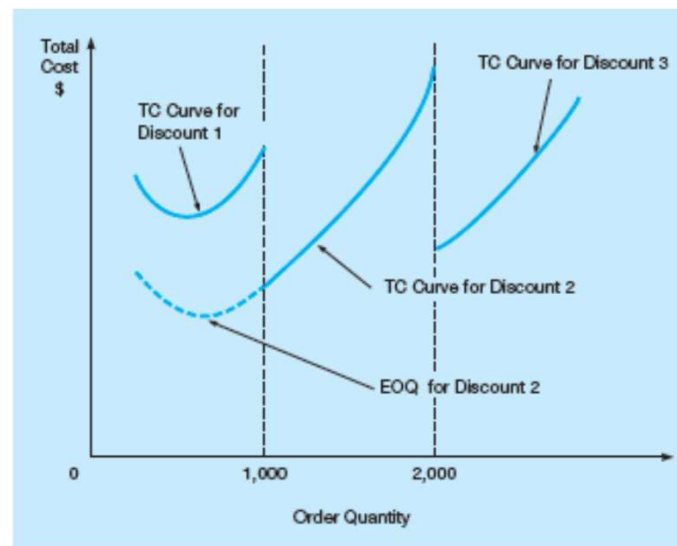
Типичен распоред на попустите е даден во следната табела:

Вид на попуст	Количина на попуст	Попуст (%)	Цена со попуст (п.е.)
1	0 до 999	0	5,00
2	1000 до 1999	4	$0,96 * 5,00 = 4,80$
3	2000 и повеќе	5	$0,95 * 5,00 = 4,75$

Акцентот кај моделите со попусти на количини е ставен на врската меѓу намалувањето на материјалниот трошок и зголемувањето на трошокот за чување.

Модел на попусти на количини (Quantity Discount Model)

На графикот е прикажан вкупниот трошок за секоја количина на попуст. Најнискиот можен трошок се достигнува за количина од $Q=1000$ единици производ.



Модел на попусти на количини (Quantity Discount Model)

Постапката за одредување оптималната количина нарачка која го минимизира вкупниот трошок при попусти на количини:

1. За секоја цена C на единица производ предметај ја оптималната

количина $Q^* = \sqrt{\frac{2DC_0}{IC}}$

2. Ако Q^* е помало од минимумот на количината за соодветниот попуст, прилагоди ја оптималната количина $Q^* =$ минимумот на на количината за соодветниот попуст.

3. За секоја оптимална количина Q^* пресметај го оптималниот вкупен трошок

$$TC(Q^*) = DC + \frac{D}{Q^*}C_0 + \frac{Q^*}{2}C_h$$

4. Најди го минималниот трошок од сите пресметани оптимални трошоци.

Модел на попусти на количини (Quantity Discount Model)

Пример 4. Една продавница за играчки продава колички играчки за 5 п.е. за една количка. Но, ако нарачаната количина е меѓу 1000 и 1999 колички, тогаш таа ги дава за цена од 4,80 п.е. за една количка, а ако нарачаната количина е 2000 и повеќе, за цена од 4,75 п.е. за една количка. Понатаму, трошокот за една нарачка е 49 п.е., годишната побарувачка е 5000 колички, а цената за чување на една количка за една година е 20% од цената на количката. Колку треба да изнесува количината за нарачка, за да се минимизира вкупниот трошок за нарачка и чување на залихите?

Ги пресметуваме оптималните количини за секој од попустите:

$$Q^*_1 = \sqrt{\frac{2DC_0}{IC}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 49}{0,2 \cdot 5}} = 700 \text{ колички} \quad Q^*_2 = \sqrt{\frac{2DC_0}{IC}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 49}{0,2 \cdot 4,80}} = 714 \text{ колички}$$

$$Q^*_3 = \sqrt{\frac{2DC_0}{IC}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 49}{0,2 \cdot 4,75}} = 718 \text{ колички}$$

Модел на попусти на количини (Quantity Discount Model)

- Правиме прилагодување на Q^*_2 и Q^*_3 , па оптималните количини за нарачка за соодветните попусти се:

$Q^*_1 = 700$ колички, $Q^*_2 = 1000$ колички, $Q^*_3 = 2000$ колички

Вид на попуст	Цена со попуст (п.е.)	Количина за нарачка (ед.)	Годишен материјален трошок = DC	Годишен трошок за нарачка = $(D/Q)C_o$	Годишен трошок за чување = $(Q/2)C_h$	Вкупен трошок (п.е.)
1	5,00	700	25000	350,00	350,00	25700,00
2	4,80	1000	24000	245,00	480,00	24725,00
3	4,75	2000	23750	122,50	950,00	24822,50

$Q^* = 1000$ колички, $TC^* = 24725,00$ п.е.

Модел на попусти на количини (Quantity Discount Model)

Пример 4. GeoGebra <https://www.geogebra.org/classic>

