Департман менаџмент,
Економски факултет, УКИМ, Скопје
(учебна 2020/2021 година – зимски семестар)

ОПЕРАЦИОНИ ИСТРАЖУВАЊА

- ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ -

Проф. д-р Ирена Стојковска,
Институт за математика,
Природно-математички факултет,
УКИМ, Скопје

E-mail: irena.stojkovska@gmail.com

Web: https://nastava-istojkovska.weebly.com/

Линеарно програмирање

- **Линеарното програмирање (ЛП)** е широко користена техника за математичко моделирање дизајнирана да им помогне на менаџерите во планирањето и донесувањето на одлуките во присуство на ресурси.
- **Почетоците на линеарнито програмирање** се уште во 40-тите години од минатиот век со оптималните планирања на Kantorovich и Koopmans, но највпечатлива е работата на Dantzig од 1947 година и неговиот Синплекс алгоритам за решавање на ЛП-проблеми.
- Линеарното програмирање е дел од поширока научна област наречена **Математичко програмирање**, каде зборот „програмирање“ се однесува на планирање, односно изработка на математички модел за реалната ситуација.
- **Примената на Линеарното програмирање** е во индустијата, војската, финансиите, маркетингот, сметководството, земјоделството итн.

Заеднички карактеристики на ЛП-проблемите

1) Една функција на цел

2) Едно или повеќе ограничувања (ја максимизираме или минимизираме функцијата на цел при дадени ограничувања)

3) Избор од повеќе алтернативи

4) Функцијата на цел и ограничувањата се линеарни

5) Сигурни вредности на параметрите (параметрите се познати и константни за време на целиот разгледуван период)

6) Променливите може да се нецелобројни

7) Ненегативни променливи

Формулирање на ЛП-проблем

Формулирањето на ЛП-проблем подразбира развивање на математичкки модел кој е слика на реалниот менаџерски проблем.

Чекори при формирање на ЛП-моделот се:

1) Целосно разбирање на менаџерскиот проблем

2) Одредување на функцијата на цел и ограничувањата

3) Дефинирање на одлучувачките променливи

4) Запишување на математички изрази за функцијата на цел и ограничувањата со помош на одлучувачките променливи

Формулирање на ЛП-проблем

Пример 1. Една фабрика за мебел произведува маси и столици. За производство на една маса потребни се 4 часа обработка на дрво и 2 часа боење и лакирање. За производство на една столица потребни се 3 часа обработка на дрво и 1 час боење и лакирање. За време на процесот на производство, обезбедени се 240 часа за обработка на дрво и 100 часа за боење и лакирање. Секоја маса се продава за профит од 70 п.е., а секоја столица за профит од 50 п.е.
Треба да се одреди најдобрата комбинација на маси и столици за производство за да се максимизира профитот.

	Маси (x)	Столици (y)	Достапни часови
Обработка на дрво	4	3	240
Боење и лакирање	2	1	100
Профит за ед.	70	50	

Формулирање на ЛП-проблем

- Функција на цел: Вкупен профит
- Ограничувања:
  1) Бројот на часови за обработка на дрво не може да надмине 240 часа.
  2) Бројот на часови за боење и лакирање не може да надмине 100 часа.
- Одлучувачки променливи:
  x – број на произведени маси
  y – број на произведени столици
- Вупен профит: 70x + 50y
- Ограничување 1): $4x + 3y \leq 240$
- Ограничување 2): $2x + y \leq 100$
- Ненегативост на променливите: $x \geq 0$ и $y \geq 0$

ЛП-модел:

$$\text{Max } f := 70x + 50y$$
$$4x + 3y \leq 240$$
$$2x + y \leq 100$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Графичко решавање на ЛП-проблем

- Кај ЛП-проблемите со две одлучувачки променливи најлесен начин да се решат е графичкиот начин.
- За да се најде оптималното решение на ЛП-задачата, прво се одредува **допустливата област**, т.е. сите точки од рамнината xOy за кои се исполнети ограничувањата. Точките кои припаѓаат на допустливата област се **допустливи точки**, и тие се кандидати за оптимално решение.
- **Графички методи** за решавање на ЛП-проблем:
  1) Метод на изопрофитни/изокостни прави
  2) Метод на темиња

Цртање на допустливата област

- Прво се цртаат правите на ограничувањата, а потоа се одредува кој дел од рамнината ги задоволува ограничувањата.

- Правата на првото ограничување минува низ (60, 0) и (0, 80). Точката (0, 0) го задоволува неравенството 4x + 2y ≤ 240, значи сите точки од рамнината кои се на иста страна со (0, 0) го задоволуваат првото ограничување.

$$4x + 3y = 240$$

$$\frac{4x}{240} + \frac{3y}{240} = 1$$

$$\frac{x}{60} + \frac{y}{80} = 1$$

- Правата на второто ограничување минува низ (50, 0) и (0, 100). Точката (0, 0) го задоволува неравенството 3x + y ≤ 100, значи сите точки од рамнината кои се на иста страна со (0, 0) го задоволуваат второто ограничување.

$$2x + y = 100$$

$$\frac{2x}{100} + \frac{y}{100} = 1$$

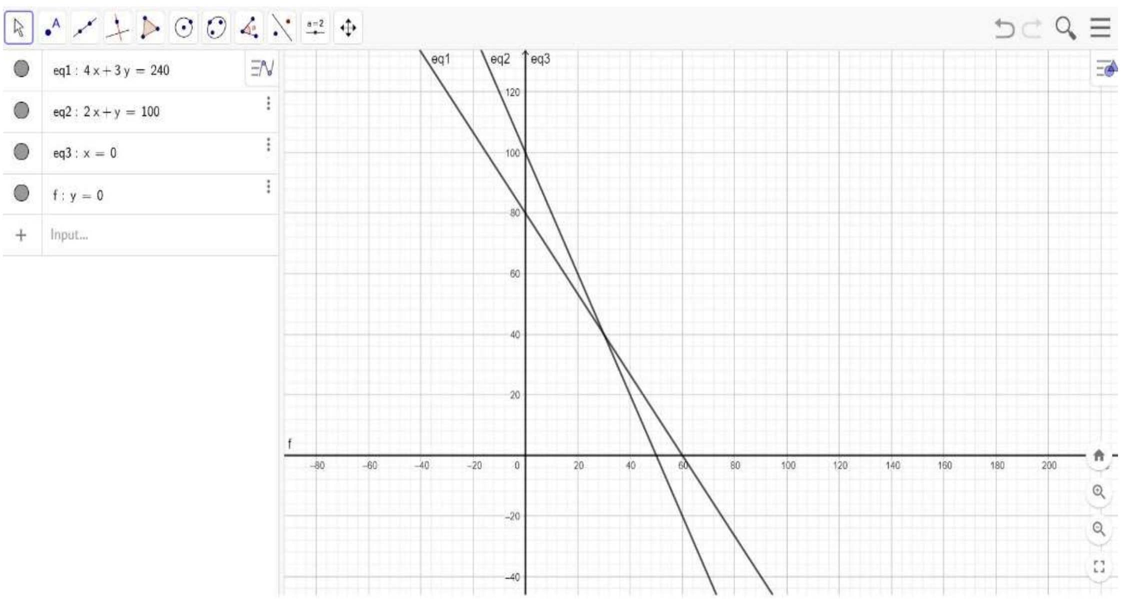
$$\frac{x}{50} + \frac{y}{100} = 1$$

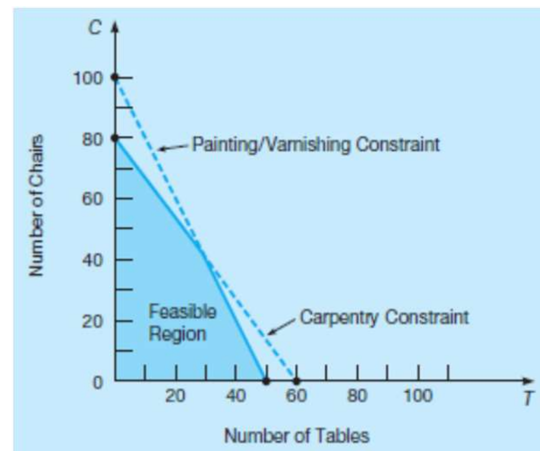
Цртање на допустливата област

- GeoGebra https://www.geogebra.org/classic

$4x + 3y \leq 240$ $\quad$ $2x + y \leq 100$

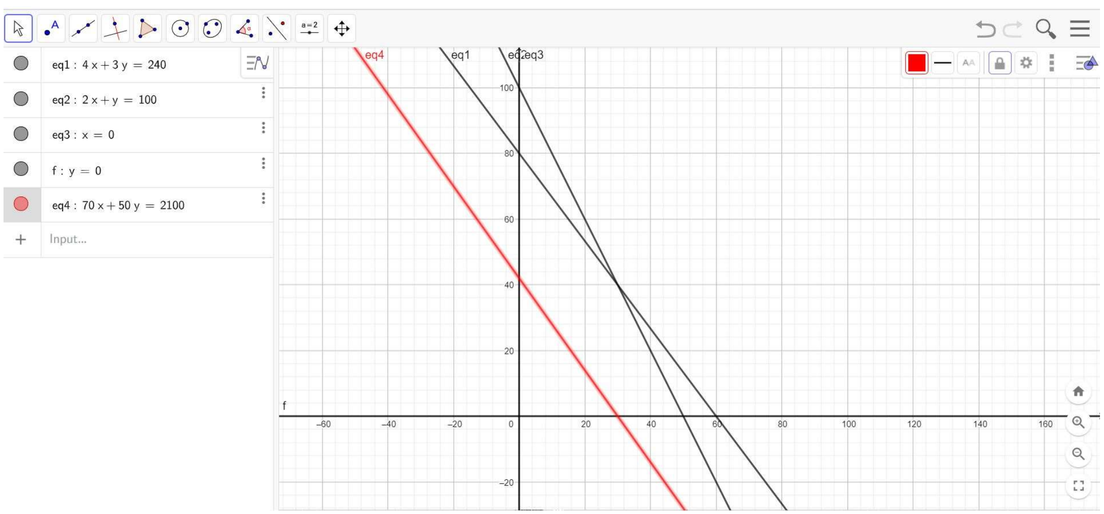
$4\cdot 0+3\cdot 0 = 0 \leq 240$ $\quad$ $2\cdot 0+0 = 0 \leq 100$





Метод на изопрофитни прави

- **Методот на изопрофитни прави** подразбира задавање можни износи за вкупниот профит, цртање на соодветните прави на профит и одредување на правата со максимален профит која има заеднички точки со допустливата област.
- Нека вкупниот профит е 2100 п.е. Изопрофитната права е 70x + 50y = 2100
- GeoGebra https://www.geogebra.org/classic



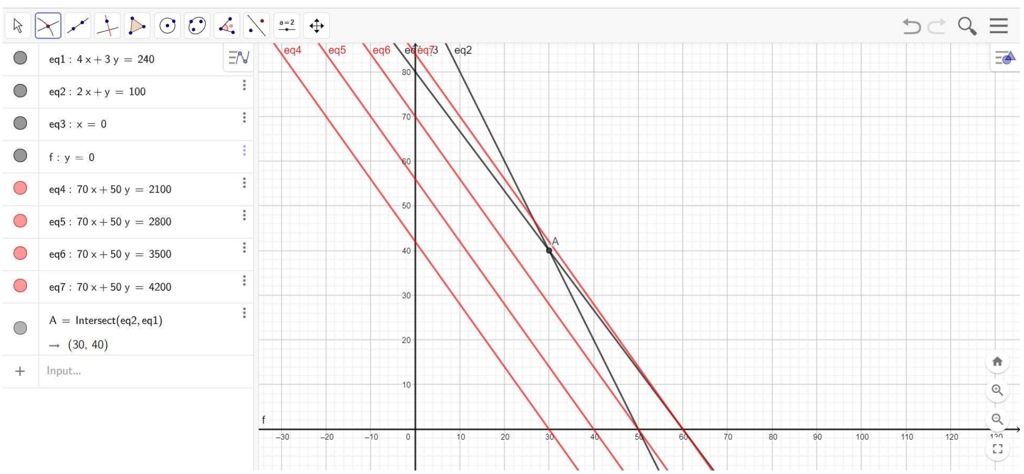
$$70x + 50y = 2100$$

$$\frac{70x}{2100} + \frac{50y}{2100} = 1$$

$$\frac{x}{30} + \frac{y}{42} = 1$$

Метод на изопрофитни прави

- Ги цртаме изопрофитните прави и за профит од 2800 п.е., 3500 п.е., 4200 п.е.
- GeoGebra https://www.geogebra.org/classic



$$\begin{cases} 4x+3y=240 \\ 2x+y=100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+3y=240 \\ y=100-2x \end{cases}$$

$$4x+3(100-2x)=240$$

$$4x+300-6x=240$$

$$60=2x$$

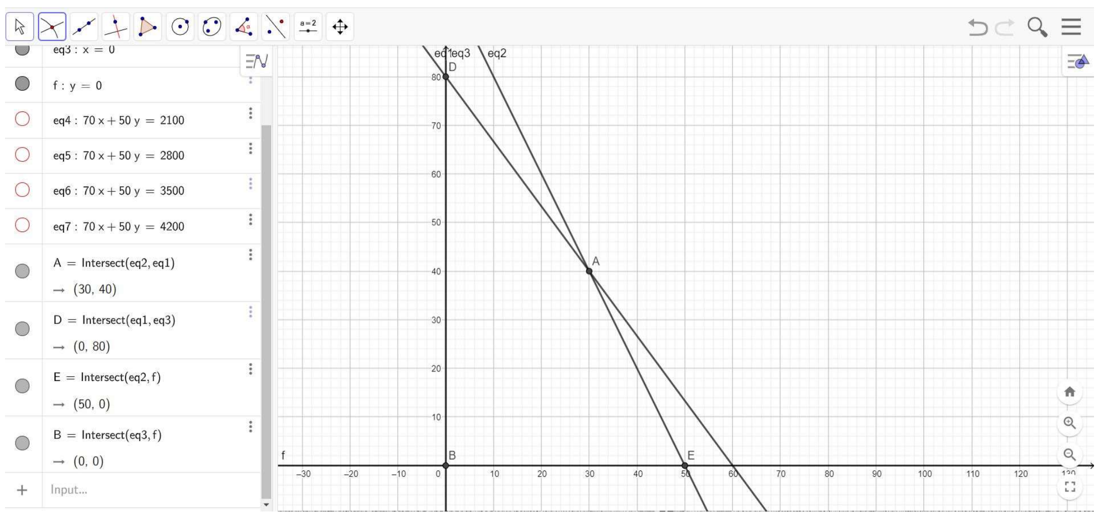
$$x=30$$

$$y=100-2x=100-60=40$$

- Максималниот профит е помал од 4200 п.е. Максималниот профит се реализира во темето (30, 40) и изнесува: $70x + 50y = 70\cdot 30+50\cdot 40=4100$ п.е.
- Оптимално прозводство: 30 маси и 40 столици

Метод на темиња

- Со **методот на темиња**, откако ќе се нацрта допистливата област, се одредуваат нејзините темиња. Теоријата на линеарно програмирање вели дека оптималното решение на проблемот се наоѓа во темињата т.е. екстремните точки на допустливата област.



- Темињата на областа се B(0, 0), E(50, 0), A(30, 40) и D(0, 80). Ова се можни кандидати за оптимално решение.

Метод на темиња

- Во секоје од темињата B(0, 0), E(50, 0), A(30, 40) и D(0, 80) го пресметуваме вкупниот профит:

Број на маси (x)	Број на столици (y)	Профит (70x + 50y)
0	0	0
50	0	3500
30	40	**4100**
0	80	4000

$70 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$

$70 \cdot 50 + 50 \cdot 0 = 3500$

$70 \cdot 30 + 50 \cdot 40 = 2100+2000 = 4100$

$70 \cdot 0 + 50 \cdot 80 = 4000$

Значи оптималното производство е 30 маси и 40 столици за остварување на оптимален профит од 4100 п.е.

Одредување на неискористени ресурси (slack) и вишок на производство (surplus)

- Во **Пример 1** оптималното решение лежи на пресекот од правите одредени од огранучувањата на ресурсите, па затоа нема да има неискористени ресурси.

$4x + 3y \le 240$
$4 \cdot 30 + 3 \cdot 40 = 120 + 120 = 240$

$2x + y \le 100$
$2 \cdot 30 + 40 = 60 + 40 = 100$

- Ако се произведат 20 маси и 25 столици, тогаш вкупното време за обработка на дрвото ќе биде:
$$4 \cdot 20 + 3 \cdot 25 = 80 + 75 = 155 \text{ часа,}$$
односно ќе останат неискористени (slack) $240 - 155 = 85$ часа.

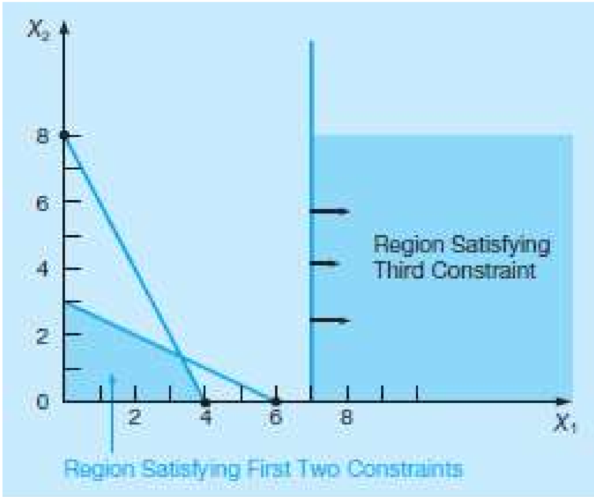
- Ако постоеше ограничување да вкупниот број на произведени маси и столици е најмалку 42, тогаш ќе се воведеше ограничувањето $x + y \ge 42$. Во тој случај, при производство на 20 маси и 25 столици ќе се јавеше вишок (surplus) на произведените производи од $(20+25) - 42 = 45 - 42 = 3$ единици.

Четири специјални случаи на линеарното програмирање

1) Недопустливост

Кога допустливата област е празно множество од точки т.е. кога не постојат точки од рамнината кои ги задоволуваат сите ограничувања. На пример, следната допустлива област е празно можество.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

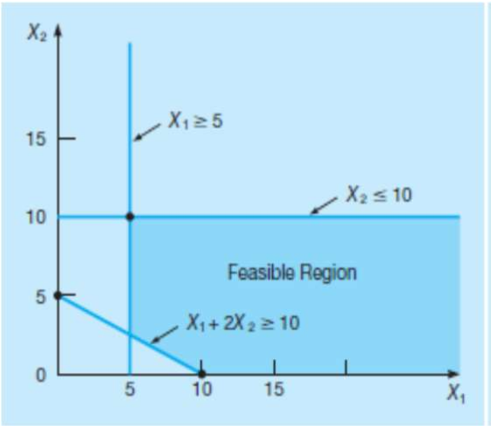


Четири специјални случаи на линеарното програмирање

2) Неограниченост

Кога оптималната вредност на функцијата на целата нема конечна вредност.

$$Max\,3x_1 + 5x_2$$
$$x_1 \geq 5$$
$$x_2 \leq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



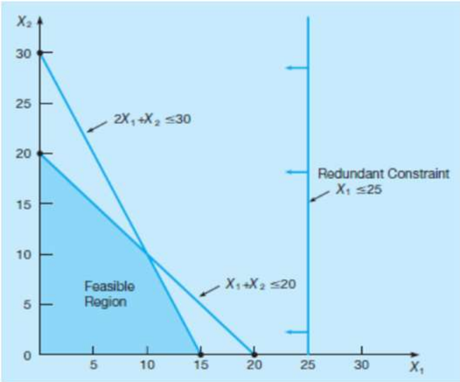
Бидејќи проблемот е максимизација за секоја вредност на профит, може да се најде точка од допустливата област која резултира со поголем профит.

Четири специјални случаи на линеарното програмирање

3) Непотребност

Кога ЛП-проблемот има ограничувања кои се непотребни, и чие отстранување не влијае на допустливата област.

$$Max\ x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 20$$
$$2x_1 + x_2 \le 30$$
$$x_1 \le 25$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



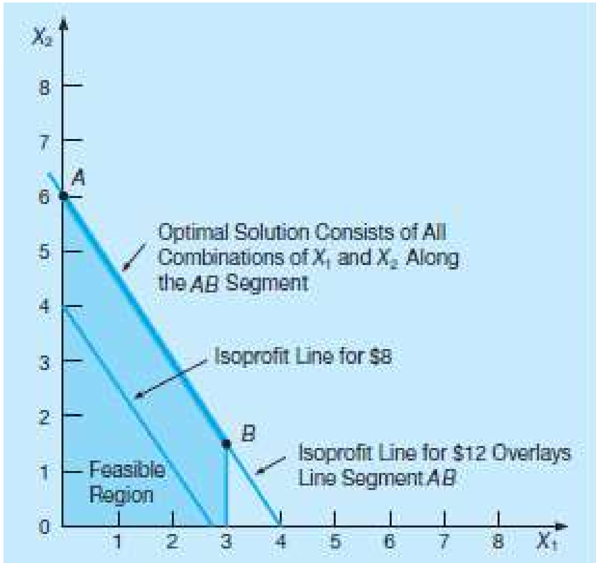
Ограничувањето x1 ≤ 25 е непотребно затоа што не ја менува допустливата област ако го нема.

Четири специјални случаи на линеарното програмирање

4) Повеќе оптимални решенија

Кога при методот на изопрофитни прави, правата на оптималниот профит ја допира допустливата област вдолж границата, тогаш секоја точка од тој дел од границата е оптимална.

$$Max\, 3x_1 + 2x_2$$
$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Анализа на осетливоста

- Еден начин за справување со променливоста во реалноста е испитувањето на осетливоста на оптималното решение. Анализата на осетливост вклучува испитување на влијанието на промените во:
  1) коефициентите во функцијата на целта
  2) технолошките коефициенти (коефициентите пред променливите во ограничувањата)
  3) расположливите ресурси (слободните членови во ограничувањата)
- Два пристапа за испитување на осетливоста на решението.
  1) **Пристап со обиди и грешки** (повторно решавање на целиот проблем, најчесто со помош на некој оптимизационен софтвер).
  2) **Аналитичкиот постоптимален метод** (одредување на опсегот на промени во параметрите кои нема да влијаат на промената на оптималното решение, без повторно решавање на целиот проблем).

Анализа на осетливоста

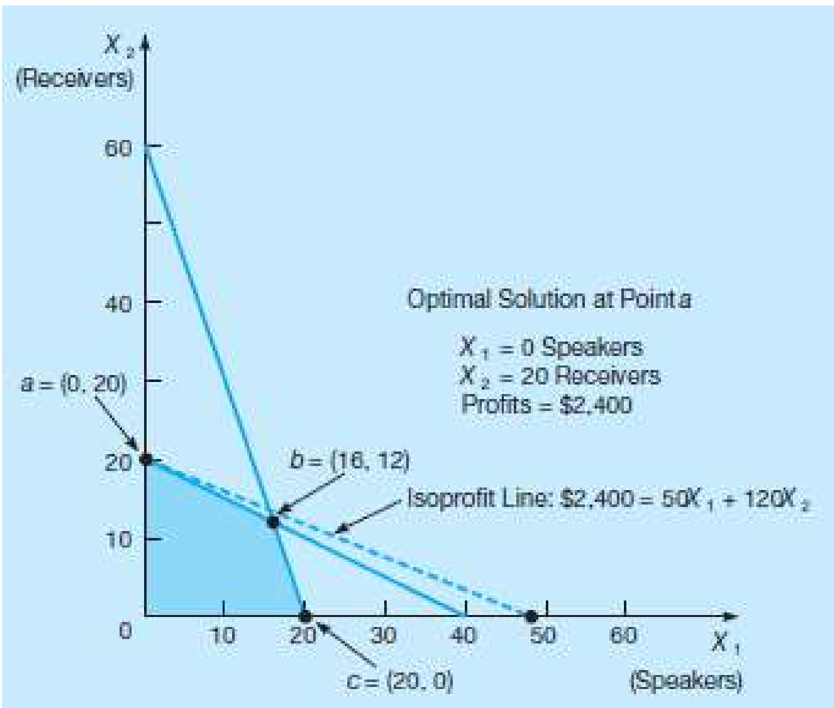
Пример 2. Една компанија произведува високо квалитетни звучници и стерео приемници. За производство на секој од овие производи потребни се ангажирања од електричари и аудио техничари.

Соодветниот ЛП-проблем е следниот:

$$
\begin{aligned}
&Max\,P := 50x_1 + 120x_2 \\
&\qquad 2x_1 + 4x_2 \le 80 \ \text{(расположливо време за работа на електричарите)} \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \le 60 \quad \text{(расположливо време за работа на аудио техничарите)} \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Анализа на осетливоста

Решението на овој ЛП-проблем е најдено со графички метод на изопрофитни прави:



Оптималното решение е (0, 20), односно производство на 0 звучници и 20 стерео приемници, при што ќе биде реализиран профит од 2400 п.е.

Искористеното време за работа на електричарите е
$2 \cdot x1 + 4 \cdot x2 = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 20 = 80$ часови

Искористеното време за работа на аудио техничарите е
$3 \cdot x1 + x2 = 3 \cdot 0 + 20 = 20$ часови

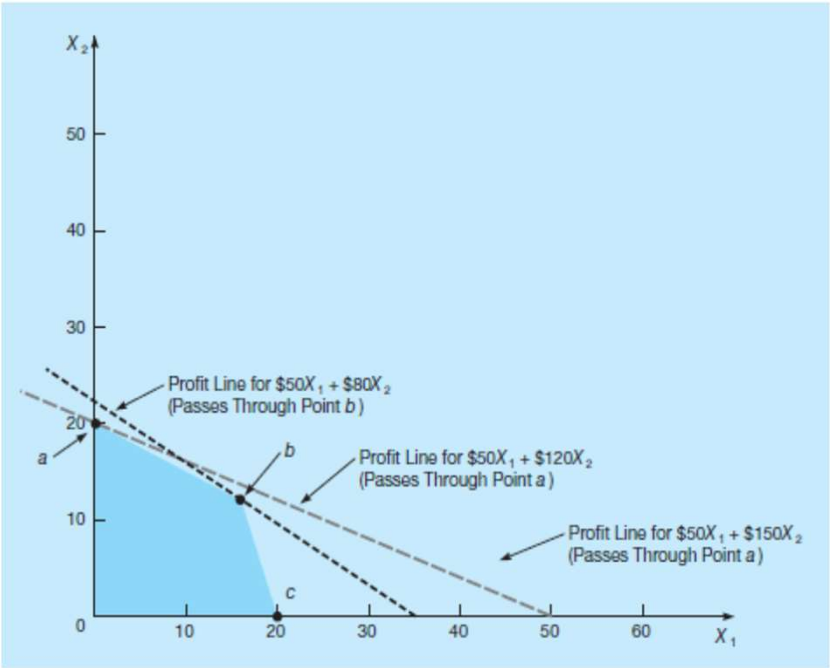
Има 60 – 20 = 40 часови неискористено време (slack) за работа на аудио техничарите.

Анализа на осетливоста

- ПРОМЕНИ ВО КОЕФИЦИЕНТИТЕ НА ФУНКЦИЈАТА НА ЦЕЛТА
  Графички, допустливата област е непроменета, но се менува наклонот на правите на изопрофит/изокост.

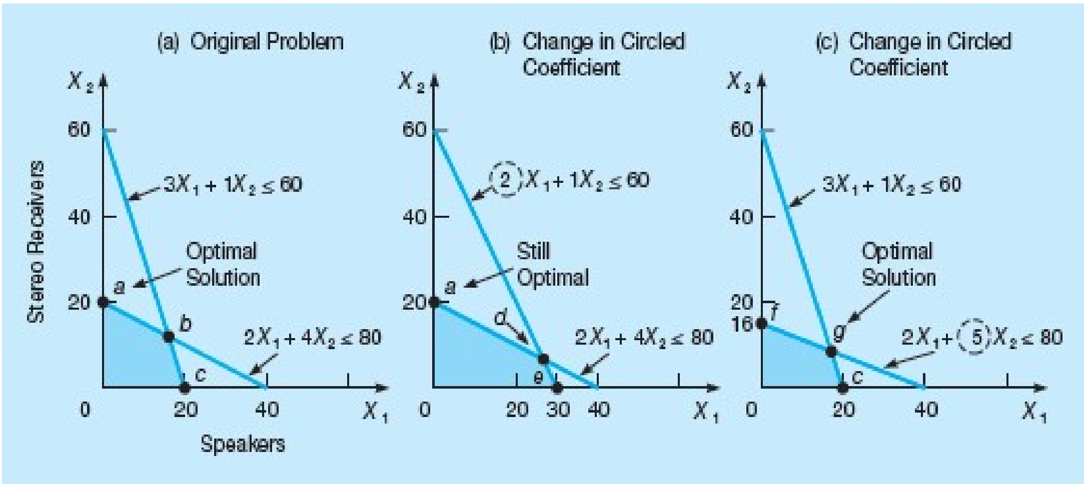
Ако профитот од еден стерео приемник се зголеми од 120 п.е. на 150 п.е., оптималното решение нема да се промени, но ќе резултира со оптимален профит од
50 · x1 + 150 · x2 = 50 · 0 + 150 · 20 = 3000 п.е.

Ако профитот од еден стерео приемник се намали од 120 п.е. на 80 п.е., новото оптимално решение ќе биде (16, 12) и ќе резултира со оптимален профит од
50 · x1 + 80 · x2 = 50 · 16 + 80 · 12 =
= 800 + 960 = 1760 п.е.



Анализа на осетливоста

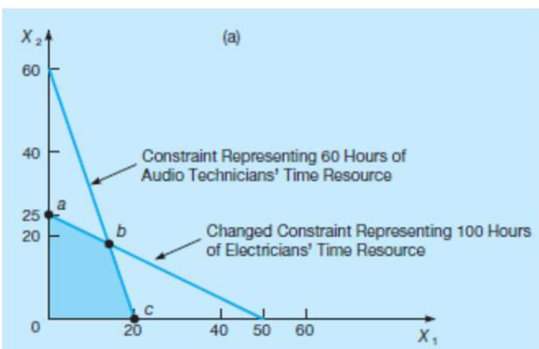
- ПРОМЕНИ ВО ТЕХНОЛОШКИТЕ КОЕФИЦИЕНТИ
  Графички тоа значи промени во допустливата област, што може да предизвика и промени во оптималното решение.

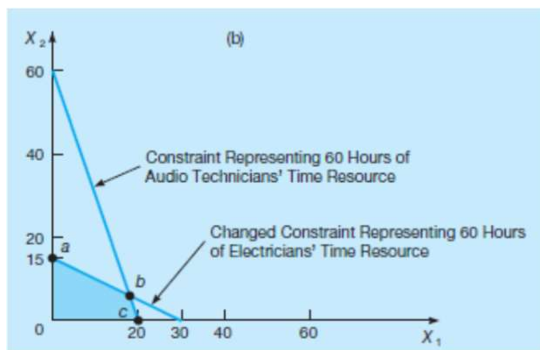


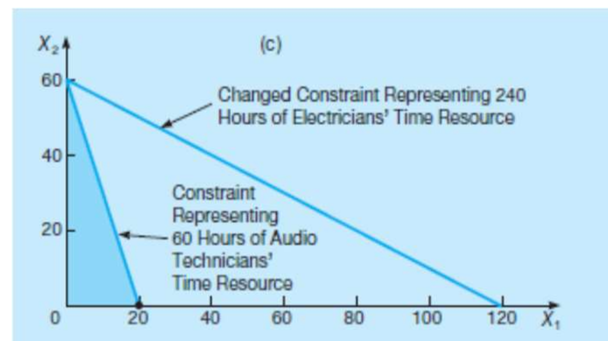
Промена на коефициентот пред x2 во второто ограничување од 1 во 5, профитот во точката g е 1945 п.е. и е поголем од профитот во точката f кој изнесува 1920 п.е.

Анализа на осетливоста

- ПРОМЕНИ ВО РЕСУРСИТЕ
  Промените во количините на ресурсите на десната страна од ограничувањата се одраз на промените во расположливите ресурси на компанијата. Со нивна промена се менува допустливата област (освен ако тоа ограничување не е непотребно).







Анализа на осетливоста

При промени во расположливото време за работа на електричарите од 80 на 100 часа (a), новото оптимално решение е (0, 25) со оптимален профит од 3000 п.е.

Значи, дополнителните 100 – 80 = 20 часа време за работа на електричарите резултира со дополнителен профит од 3000 – 2400 = 600 п.е., односно дополнителен профит од 30 п.е. за еден час што претставува **дуална цена** за првото ограничување т.е. подобрување на функцијата на целта како резултат на зголемување на една единица на десната страна од ограничувањето.

Промената на расположливото време за работа на електричарите од 80 на 60 часа (b), новото оптимално решение е (0, 15) со оптимален профит 1800 п.е. Промената на расположливото време за работа на електричарите од 80 на 240 часа (c), новото оптимално решение е (0, 60) со оптимален профит 7200 п.е. Ако расположливото време за работа на електричарите се зголеми и над 240 часа, профитот нема повеќе да се зголемува, ќе има неискористено време за работа на електричарите (slack), а ќе биде искористено целото расположливо време за работа на аудио техничарите.