

Департман менаџмент,  
Економски факултет, УКИМ, Скопје  
(учебна 2020/2021 година – зимски семестар)

# ОПЕРАЦИОНИ ИСТРАЖУВАЊА

- ПРОЕКТЕН МЕНАЏМЕНТ -

---

Проф. д-р Ирена Стојковска,  
Институт за математика,  
Природно-математички факултет,  
УКИМ, Скопје

E-mail: [irena.stojkovska@gmail.com](mailto:irena.stojkovska@gmail.com)

Web: <https://nastava-istojkovska.weebly.com/>

# Проектен менаџмент

- Реалните проекти на големите компании најчесто се големи и сложени.
- Првиот чекор во планирањето на проектите е развивање на **работната структура на проектот (WBS – work breakdown structure)** - идентифицирање на активностите кои мора да се реализираат во рамки на проектот.
- **Активност** е работа или задача која е дел од проектот. За секоја активност се одредува време, тошок, потребни ресурси, претходници и одговорни лица.
- Едни од најкористените техники на квантитативна анализа кои им помагаат на менаџерите да ги планираат сложените проекти, да ги распределуваат активностите, да ги надгледуваат и контролираат се **PERT (Program Evaluation and Review Technique)** и **CPM (Critical Path Method)**.

# PERT/CPM пристап

- Техниката PERT била развиена во 1958 година од страна консултантска компанија која за потребите на морнарицата на USA развила техника за контролирање на ракетната програма Polaris.
- Истовремено со техниката PERT бил развиен и CPM методот од Kelley во 1957 година. Првично, тој бил искористен за изградба и одржување на хемиска фабрика на компанијата DuPont.
- Двете техники PERT и CPM се слични во нивниот пристап, но се разликуваат во делот на оценување на времето на активностите. Кај техниката PERT, се користат три времиња за одредување на очекуваното време за активност, па PERT е веројатносна техника. Од друга страна CPM е детерминистички метод, кој претпоставува дека времињата на активностите се познати со сигурност.

# Чекори на PERT/CPM пристапот

1. Дефинирање на проектот и сите негови значајни активности или задачи.
2. Развивање на врски меѓу активностите. Одредување кои активности мора да претходат на другите.
3. Цртање на **мрежа** која ги поврзува сите активности.
4. Доделување оценето време и/или трошоци на сите активности.
5. Пресметување на најдолгиот временски пат низ мрежата, наречен **критичен пат**.
6. Користење на мрежата за планирање, распоредување, надгледување и контролирање на проектот.

# PERT/CPM техника

PERT/CPM техниката може да даде одговор на следните прашања:

1. Кога ќе биде завршен целиот проект?
2. Кои се критичните активности или задачи – тоа се оние активности кои ќе го одложат целиот проект, ако тие се одложат?
3. Кои се некритични активности – тоа се оние може да се извршат подоцна, без да повлијаат на одложувањето на проектот?
4. Ако времето на активностите се пресметува со помош на три оценки за времиња, која е вкупната веројатност дека проектот ќе биде завршен на време?
5. На некој конкретен датум, дали реализацијата на проектот е навремена, доцни или се реализира пред време?
6. На некој конкретен датум, дали потрошените пари се еднакви, помалку или повеќе од планираниот буџет за тој датум?
7. Дали има доволно расположливи ресурси да се заврши проектот на време?

# Моделирање во реалниот свет

Како техниката PERT помогнала за подобрување на услугата во една болница  
(Journal of Health Management (2013) 15(3):353-359)

- **Дефинирање на проблемот** - Доцнењето на грижата кон пациентите во болничкиот оддел за итни интервенции предизвикувало загуба на животи и пари.
- **Развивање на моделот** - Бил развиен PERT модел кој ги следел интервенциите кај пациентите додека претстојуваат во одделот.
- **Собирање на податоци** - Случајно бил избран примерок од 100 пациенти од популација од 460 пациенти за време на 2-месечен период. Времињата на интервенциите биле мерење со стоперица.
- **Развивање на решение** – Податоците биле ставени во PERT моделот и биле пресметани времињата за завршување на проектот и варијансите (дисперзиите).

# Моделирање во реалниот свет

- **Тестирање на решението** – Резултатите биле како и што се очекувало. Некои процеси, како пополнувањето на формуларите го забавивал целиот систем.
- **Анализа на резултатите** – PERT моделот покажал дека времето за завршување на проектот е 84,9 минути со варијанса од 253,1.
- **Имплементација на резултатите** – PERT и помогнал на болницата да ги одреди критичните активности при грижата за пациентите во оделот за итни интервенции. PERT одредил и кои активности може да се подобрат. Како резултат на овој модел болницата можела подобро да ги распореди активностите за грижа на пациентите.

# PERT/CPM анализа на конкретен проблем

- **Пример 1.** Една металопреработувачка компанија сака да реализира проект зачувување на околината, поточно да инсталира сложен систем за филтрирање на воздухот кој излегува од нејзиниот главен оџак. Инсталацијата на филтерот треба да ја заврши за 16 недели.
- **Одредување на активностите и нивните непосредни претходници**

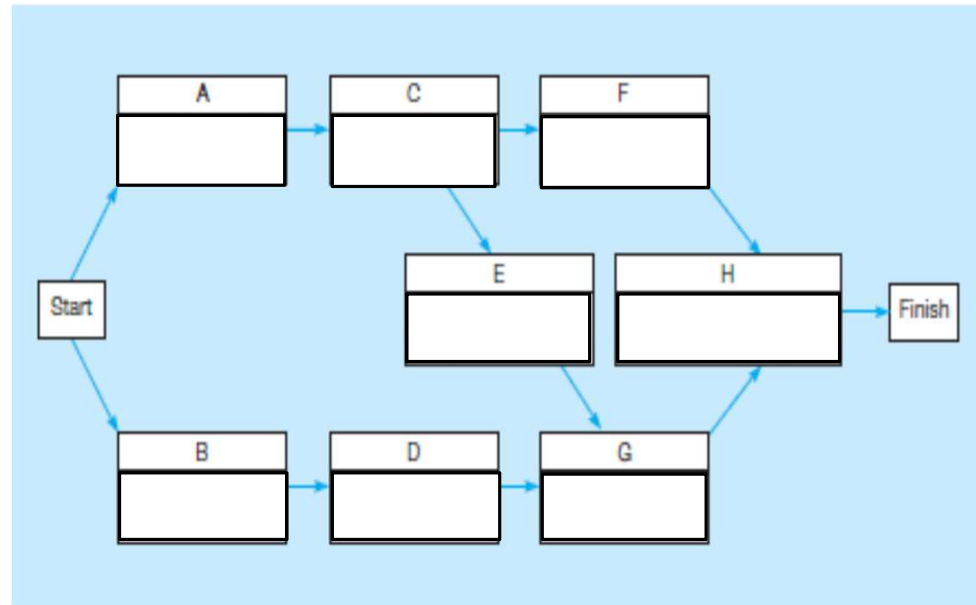
Активност	Опис	Непосредни претходници
A	Изработка на внатрешните елементи	-
B	Измени на подот и кровот	-
C	Конструкција на колекторот	A
D	Ставање бетон и инсталација на рамка	B
E	Изградба на високотемпературна печка	C
F	Инсталација на системот за контрола на загадувањето	C
G	Инсталација на уредот за загадување на воздухот	D, E
H	Проверка и тестирање на системот за контрола на загадувањето	F, G



# Цртање на PERT/CPM мрежата

- Постојат две техники за цртање на мрежата на активности: **AON (activity-on-node)** техника при која активностите се во јазлите и **AOA (activity-on-arc)** техника при која лаците во графот се активностите. Ние ќе ја користиме AON техниката.

Активност	Непосредни претходници
A	-
B	-
C	A
D	B
E	C
F	C
G	D, E
H	F, G



# Определување на времето за извршување на активностите

- Креаторите на CPM техниката имаат доделено само едно време на секоја активност, па затоа за одредување на критичниот пат доволно е за секоја активност да имаме едно време.
- PERT техниката користи веројатносна распределба базирана на три оценки на времето, потоа се користи тежинска средина од овие времиња за одредување на една оценка на времето:
  - **Оптимистичко време (a)** = време за кое ќе се изврши активноста ако сè оди според планираното. Во реалноста постои мала веројатност (1/100) да се случи ова.
  - **Песимистичко време (b)** = време за кое ќе се изврши активноста во најлош случај. Исто така и веројатноста да се реализира овој случај е многу мала.
  - **Најверојатно време (m)** = најреална оценка на времето на извршување на активноста

# Определување на времето за извршување на активностите

- Според PERT, времето за извршување на една активност има **бета веројатносна распределба**, која се користи за одредување на очекуваното време и варијансата за завршување на активността.

- **Очекуваното време на активността (t) е**

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

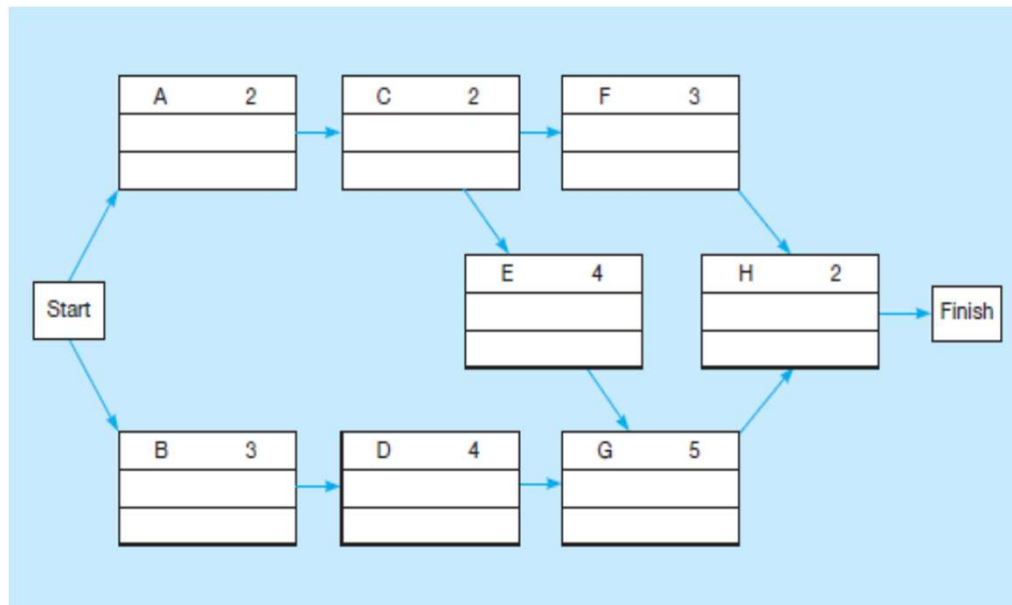
- **Варијансата (дисперзијата) на времето за извршување на активността е**

$$Var = \left( \frac{b - a}{6} \right)^2$$

# Определување на времето за извршување на активностите

Активност	Оптимистичко a	Најверојатно m	Песимистичко b	Очекувано време t	Варијанса Var
A	1	2	3	2	4/36
B	2	3	4	3	4/36
C	1	2	3	2	4/36
D	2	4	6	4	16/36
E	1	4	7	4	36/36
F	1	2	9	3	64/36
G	3	4	11	5	64/36
H	1	2	3	2	4/36
Вкупно				25	

# Наоѓање на критичниот пат



- **Критичниот пат** е најдолгиот временски пат низ мрежата со активности. Со анализата на критичниот пат на мрежата од активности, се одредува колку долго ќе трае проектот.

# Наоѓање на критичниот пат

1. **Најрано време за почеток (ES – Earliest Start time)** – најраното време за започнување на активноста без да попречи на непосредниот претходник
2. **Најрано време за крај (EF – Earliest Finish time)** – најраното време кога активноста може да заврши
3. **Најдоцно време за почеток (LS – Latest Start time)** – најдоцното време за започнување на активноста без да се пролонгира целиот проект
4. **Најдоцно време за крај (LF – Latest Finish time)** – најдоцното време за завршување на активноста без да се пролонгира целиот проект

Активност	t
ES	EF
LS	LF

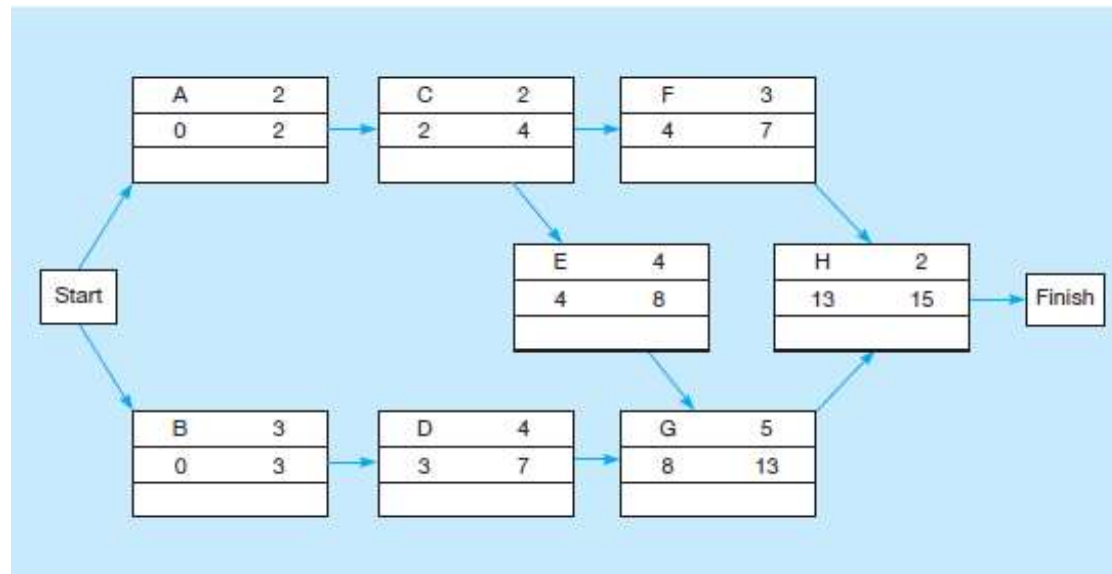
# Наоѓање на критичниот пат

- Формули за пресметување на времињата ES и EF:

$$EF = ES + t$$

ES = Најголемото EF на непосредните претходници

- Почетокот на целиот проект се сетира во време нула. Па секоја активност кој нема претходници има  $ES=0$ . Остатокот од мрежата се пополнува **одејќи нанапред (forward pass)**.



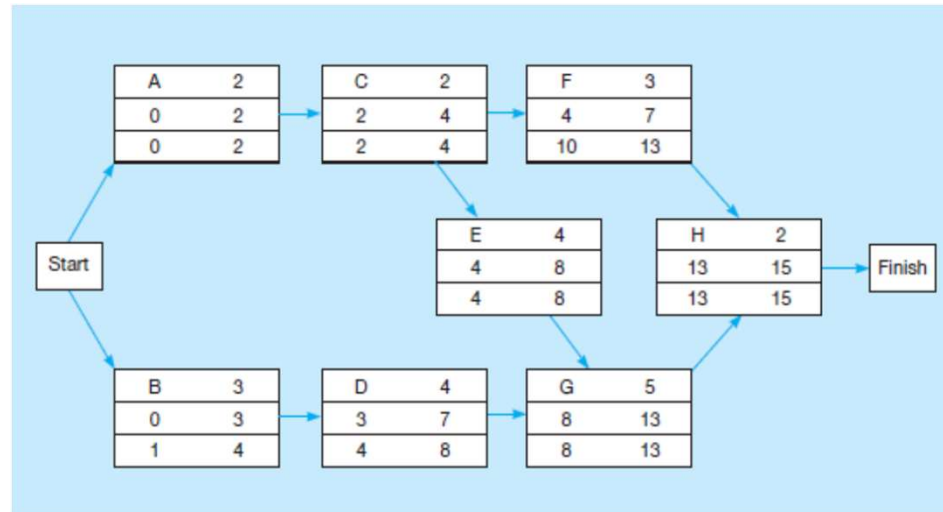
# Наоѓање на критичниот пат

- Формули за пресметување на времињата LS и LF:

$$LS = LF - t$$

LF = Најмалото LS на активностите кои следат

- Бидејќи проектот треба да заврши за 15 недели, тоа значи дека за активноста H, имаме дека LF = 15. Мрежата ја пополнуваме **одејќи наназад (backward pass)**.





# Наоѓање на критичниот пат

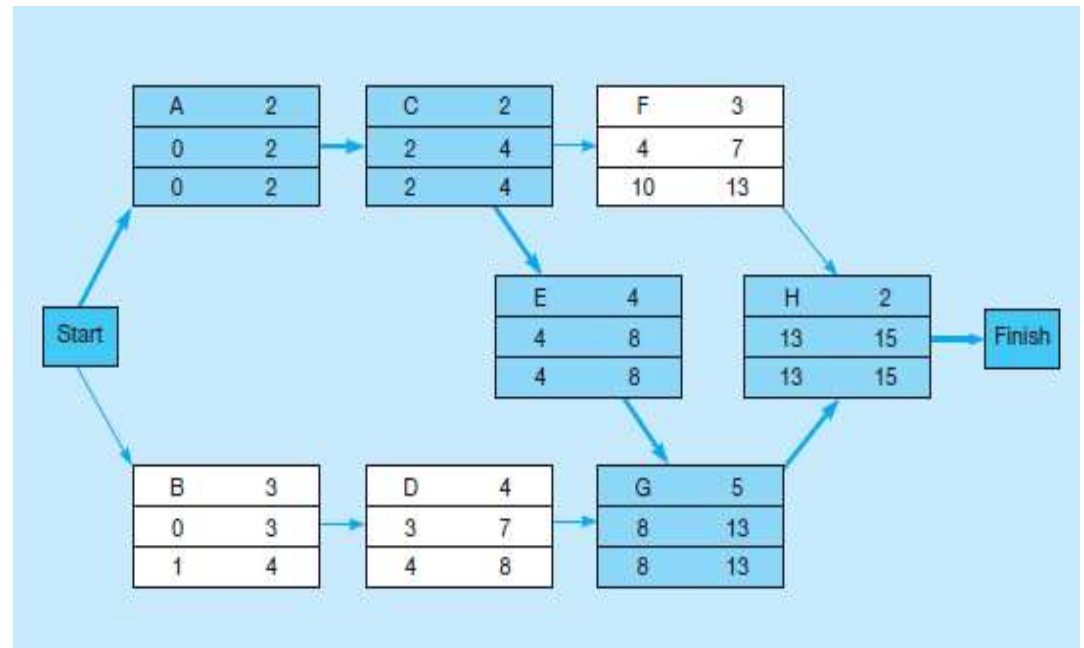
- „Слободното време“ (slack time) на една активност е времето за кое активноста може да биде одложена без да го пролонгира целиот проект.

$$\text{Slack} = \text{LS} - \text{ES} \text{ или } \text{Slack} = \text{LF} - \text{EF}$$

Активност	Најран почеток, ES	Најран крај, EF	Најдоцен почеток, LS	Најдоцен крај, LF	„Слободно време“, LS-ES	На критичниот пат?
A	0	2	0	2	0	Да
B	0	3	1	4	1	Не
C	2	4	2	4	0	Да
D	3	7	4	8	1	Не
E	4	8	4	8	0	Да
F	4	7	10	13	6	Не
G	8	13	8	13	0	Да
H	13	15	13	15	0	Да

# Наоѓање на критичниот пат

- Активностите A, C, E, G, H немаат „слободно време“, значи нивното одлагање ќе го одложи целиот проект, па тие се нарекуваат **критични активности**, и лежат на **критичниот пат**.
- Критичниот пат е прикажан на следната мрежа (вкупното време за завршување на проектот е 15 недели):



# Веројатност за завршување на проектот

- Реално постои варијација во оценките на времињата на завршување на активностите. PERT ги користи варијансите на времињата на активностите на критичниот пат за да ја одреди варијансата на целиот проект. **Времињата на активностите се меѓусебно независни**, па затоа активноста на целиот проект е сума од варијансите на критичните активности:

Варијанса на проектот =  $\Sigma$  варијансите на критичните активности

Варијанса на проектот =

$$= 4/36 + 4/36 + 36/36 + 64/36 + 4/36 = 112/36 = 3,111$$

Стандардна девијација на проектот =

$$= \sigma_T = \sqrt{3,111} = 1,76 \text{ недели}$$

Критична активност	Варијанса Var
A	4/36
C	4/36
E	36/36
G	64/36
H	4/36

# Веројатност за завршување на проектот

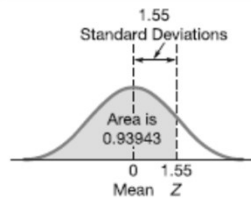
- Претпоставуваме и дека вкупното време за завршување на проектот има **нормална веројатносна распределба**, со очекувано време потребно за завршување на целиот проект 15 недели и варијанса 3,111, односно стандардна девијација од 1,76 недели.
- Тогаш, за да ја одредиме веројатноста за завршување на проектот за или пред 16 недели, прво го одредуваме бројот на стандардни девијации оддалеченост на крајниот рок (16 недели) од очекуваното време за завршување на проектот (15 недели):

$$Z = \frac{16 - 15}{1,76} = 0,57$$

- Потоа со помош на таблицата за стандардна нормална распределба, ја наоѓаме веројатноста проектот кој има очекувано време за завршување од 15 недели со стандардна девијација 1,76 недели, заврши за или пред 16 недели дека е  $0,71566 = 71,566\% \approx 71,6\%$ .

# Веројатност за завршување на проектот

## Appendix A: Areas Under the Standard Normal Curve



**Example:** To find the area under the normal curve, you must know how many standard deviations that point is to the right of the mean. Then the area under the normal curve can be read directly from the normal table. For example, the total area under the normal curve for a point that is 1.55 standard deviations to the right of the mean is 0.93943.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189

# Што најде PERT за Пример 1?

1. Очекуваното време за завршување на проектот е 15 недели.
2. Постои 71,6% шанси дека проектот ќе биде завршен до рокот од 16 недели. Со PERT анализата лесно може да се најде веројатноста за завршување на проектот до било кој краен рок.
3. Пет активности A, C, E, G, H се на критичниот пат. Ако некоја од нив се пролонгира, ќе се пролонгира целиот проект.
4. Три активности B, D, F не се на критичниот пат, тие имаат ненулно „слободно време“. Менаџментот, ако има потреба, може да зема од нивните ресурси, за да евентуално го забрза проектот.
5. Направен е детален распоред на активностите, со почетни и крајни времиња (табелата со ES, EF, LS, LF).

# PERT/Cost

PERT/Cost е модификација на PERT која им дозволува на менаџерите да планираат, прават распореди, да го надгледуваат и контролираат трошокот, како и времето.

## Планирање и распоредување на трошоците (планирање на буџетот)

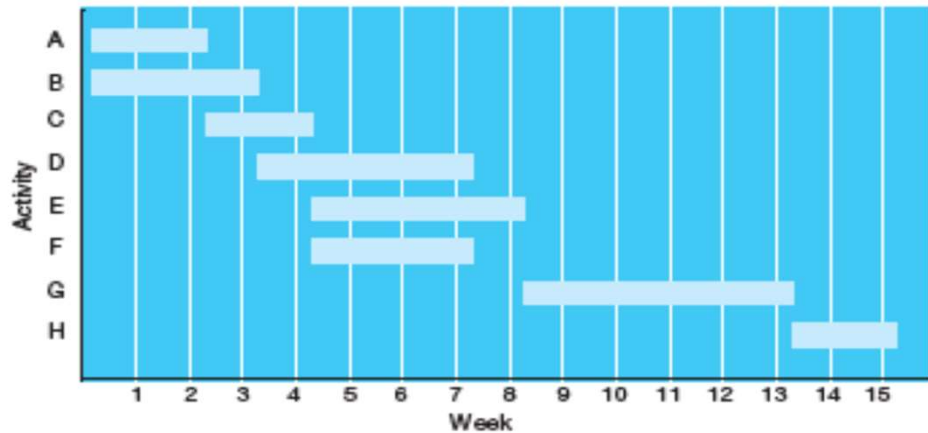
Чекори во планирање на буџетот:

1. Одредување на буџет за секоја активност.
2. Ако проектот е голем, неколку активности може да се комбинираат во поголем **работен пакет** - логична колекција на активности.
3. Конвертирање на буџетот на активноста во трошок на единица време, под претпоставка дека трошењето е рамномерно во текот на целиот период на активноста.
4. Со користење на најраните и најдоцните почетни времиња, се наоѓа колку треба да се потроши за време на секоја недела или месец за да се заврши проектот до предвидениот рок.

# Планирање на буџетот

**Пример 1. (продолжува)** Врз база на најраните почетни и крајни времиња, менаџментот на компанијата го направил Gantt дијаграмот за распределба на активностите за да направи распоред на буџетот, односно да одреди колку ќе биде потрошено во секоја недела за секоја од активностите.

Активност	Најран почеток, ES	Најран крај, EF
A	0	2
B	0	3
C	2	4
D	3	7
E	4	8
F	4	7
G	8	13
H	13	15





# Планирање на буџетот

Табела со буџет за секоја од активностите и пресметан неделен буџет за секоја активност.

Активност	Најран почеток, ES	Најдоцен почеток, LS	Очекувано време, t	Вкупен буџет (\$)	Буџет за една недела (\$)
A	0	0	2	22000	11000
B	0	1	3	30000	10000
C	2	2	2	26000	13000
D	3	4	4	48000	12000
E	4	4	4	56000	14000
F	4	10	3	30000	10000
G	8	8	5	80000	16000
H	13	13	2	16000	8000
Вкупно				308000	

# Планирање на буџетот

- Распределба на буџетот (во 1000\$) со користење на најраните почетни времиња

Актив.	Недела															Вкупно
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
A	11	11														22
B	10	10	10													10
C			13	13												26
D				12	12	12	12									48
E					14	14	14	14								56
F					10	10	10									30
G									16	16	16	16	16			80
H														8	8	16
Вкупно недел.	21	21	23	25	36	36	36	14	16	16	16	16	16	8	8	308
Вкупно кумул.	21	42	65	90	126	162	198	212	228	224	260	276	292	300	308	

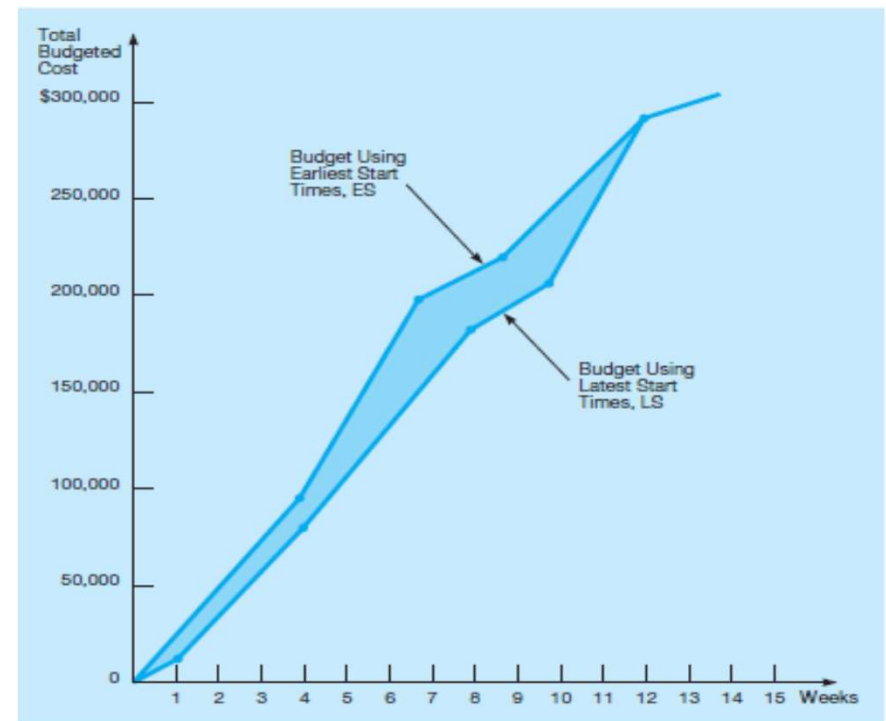
# Планирање на буџетот

- Распределба на буџетот (во 1000\$) со користење на најдоцните почетни времиња

Актив.	Недела															Вкупно
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
A	11	11														22
B		10	10	10												10
C			13	13												26
D					12	12	12	12								48
E					14	14	14	14								56
F											10	10	10			30
G									16	16	16	16	16			80
H														8	8	16
Вкупно недел.	11	21	23	23	26	26	26	26	16	16	26	26	26	8	8	308
Вкупно кумул.	11	32	55	78	104	130	156	182	198	214	240	266	292	300	308	

# Планирање на буџетот

- Во втората табела се прикажани најдоцните времиња кога да се потроши фондот, а во првата табела најраните времиња за тоа. Па, менаџерот може да одбере било кој буџет меѓу тие две вредности. Овие две табели го формираат **допустливиот опсег на буџетот**.
- На графикот е нацртана **допустливата област на буџетот**. На почетокот на проектот вообичаено е да се формираат вакви распореди на буџетот, и потоа додека трае проектот, треба трошењето на фондот да се надгледува и контролира.



# Надгледување и контролирање на проектните трошоци

- Целта на надгледувањето и контролирањето на проектните трошоци е да се провери дали проектот се реализира навреме и дали трошењето на буџетот е според планираното.
- **Пример 1. (продолжува)** Компанијата сака да дознае дали проектот за зачувување на околината со инсталација на систем за филтитање на воздухот се одвива според планираното. Сега е 6-тата недела од 15-неделниот проект. Активностите А, В и С се завршени и за нив се потрошени 20000\$, 36000\$ и 26000\$ соодветно. Активноста D е завршена само 10% и за тоа се потрошени 6000\$. Активноста E е завршена 20% и за тоа се потрошени 2000\$, а активноста F е завршена 20% со трошок од 4000\$. Активностите G и H не се почнати. Дали проектот е на распоред? Која е вредноста на завршената работа? Дали се направени вишок трошоци?

# Надгледување и контролирање на проектните трошоци

- Вредноста на завршената работа се пресметува според:

$$\begin{aligned} & \text{Вредност на завршената работа} = \\ & = (\text{Процент на завршена работа}) \times (\text{Вкупен буџет на активноста}) \end{aligned}$$

- Исто така, се пресметува и разликата на активноста, каде вистинскиот трошок е реално колку се потрошило за таа активност до тој момент:

$$\text{Разлика на активност} = \text{Вистински трошок} - \text{Вредност на завршената работа}$$

- Ако разликата на активноста е негативна, значи дека помалку се потрошило од планираното, ако разликата е позитивна тогаш буџетот се пречекорил.

# Надгледување и контролирање на проектните трошоци

Активност	Вкупен буџет (\$)	Процент на завршена работа (%)	Вредност на завршената работа (\$)	Вистински трошок (\$)	Разлика на активност (\$)
A	22000	100	22000	20000	-2000
B	30000	100	30000	36000	6000
C	26000	100	26000	26000	0
D	48000	10	4800	6000	1200
E	56000	20	11200	20000	8800
F	30000	20	6000	4000	-2000
G	80000	0	0	0	0
H	16000	0	0	0	0
Вкупно			100000	112000	12000

# Надгледување и контролирање на проектните трошоци

- Свкупно во 6-тата недела се случило пречекорување на буџетот од 12000\$.
- Ако компанијата ги распоредила активностите според најраните почетни времиња, тогаш до 6-тата недела требало да биде потрошен буџет од 162000\$ (од претходна табела). До сега се потрошени 112000\$, значи проектот доцни и има печекорување на буџетот.
- Менаџментот треба да го забрза проектот, за да заврши на време, и да ги контролира идните трошоци.



# Project Crashing / Кратење на проектот

- Ќе видиме како проектот може да се забрза со трошење на дополнителни пари. Во рамките на CPM методот, се разгледува и можноста за намалување на времето на проектот, тој процес се нарекува **кратење (Crashing)**.
- При оваа процедура, се користи **нормалното време (t)** на секоја активност за да се најде критичниот пат. Се користи и **нормалниот трошок** за завршување на секоја од активностите. Ако крајниот рок е пред нормалниот рок за завршување на проектот, некои дополнителни мерки треба да се направат.
- Се користат нови времиња и трошоци за активностите. **Скратено време (crash time)** е најкраткото можно време за кое би се извршила активността. **Трошок со кратење (crash cost)** е трошокот за завршување на активността порано од нормалното време. **Ако проектот мора да се скрати, тогаш пожелно е тоа да се стори при најмал дополнителен трошок.**

# Project Crashing / Кратење на проектот

- Чекори за кратење на проектот

1. Најди го нормалниот критичен пат и критичните активности.

2. Пресметај го трошокот со кратење на неделно ниво (или друг временски период) за сите активности во мрежата:

$$\text{Трошок за кратење (за временски период)} = \frac{\text{Трошок со кратење} - \text{Нормален трошок}}{\text{Нормално време} - \text{Скратено време}}$$

3. Одбери активност на критичниот пат со најмал трошок за кратење на неделно ниво. Намали ја оваа активност најмногу што може или толку колку да се достигне посакуваниот нов краен рок на проектот.

4. Провери дали критичниот пат сè уште е критичен. Често намалувањето на времето на на активност која е на критичниот пат, доведува до појавување на нови критични патишта. Ако критичниот пат е сè уште најдолгиот пат низ мрежата, врати се на чекор 3. Ако не е, најди нов критичен пат и врати се на чекор 3.

# Project Crashing / Кратење на проектот

- **Пример 1. (продожува)** Да претпоставиме дека на компанијата ѝ се дадени 14 недели за завршување на проектот, наместо 16 недели. Или, да претпоставиме дека, менаџерот ќе добие бонус ако го заврши проектот за 12 недели. За потсетување, должината на критичниот пат е 15 недели. Претпоставувајќи дека кратењето на времето е линеарно, се пресметуваат трошоците за кратење за една недела.

Активност	Нормално време (недели)	Скратено време (недели)	Нормален трошок (\$)	Трошок со кратење (\$)	Трошок за кратење за една недела (\$)	Критичен пат?
A	2	1	22000	23000	1000	Да
B	3	1	30000	34000	2000	Не
C	2	1	26000	27000	1000	Да
D	4	3	48000	49000	1000	Не
E	4	2	56000	58000	1000	Да
F	3	2	30000	30500	500	Не
G	5	2	80000	86000	2000	Да
H	2	1	16000	19000	3000	Да

# Project Crashing / Кратење на проектот

- Активностите А, С, Е се на критичниот пат и имаат најмал трошок за кратење за една недела од 1000\$. Ако активност А се скрати за една недела, времето за завршување на проектот ќе се намали на 14 недели.
- Тогаш ќе има два критични патишта, едниот е првичниот критичен пат А, С, Е, Г, Н, а вториот е В, Д, Г, Н со еднакви времиња од 14 недели. Секое следно кратење на проектот треба да се направи на двата критични пата. Ако сакаме преоктот да се скрати за дополнителни 2 недели, активност Г се наоѓа на двата критични пата, па ако таа се намали за 2 недели при дополнителен трошок од од 2000\$ неделно, вкупното време за завршување на проектот ќе се скрати на 12 недели, а вкупниот трошок за намалување на проектот ќе биде 5000\$ (1000\$ за намалување на активниста А за 1 недела и 4000\$ за намалување на активност Г за 2 недели).
- За посложени проекти со посложени мрежи на активности, се применува пософистицирана техника, како на пример **линерно програмирање**.