Департман менаџмент,
Економски факултет, УКИМ, Скопје
(учебна 2020/2021 година – зимски семестар)

ОПЕРАЦИОНИ ИСТРАЖУВАЊА

- ТЕОРИЈА НА ИГРИ -

Проф. д-р Ирена Стојковска,
Институт за математика,
Природно-математички факултет,
УКИМ, Скопје

E-mail: irena.stojkovska@gmail.com

Web: https://nastava-istojkovska.weebly.com/

Теорија на игри

[5] F. S. Hillier, G. J. Lieberman, *Introduction to operations research*, The McGraw-Hill Companies (2001).

- **Теоријата на игри** е математичка теорија која ги проучува општите карактеристики на компетитивните ситуации, и помага на спротивставените страни при процесот на одлучување.
- Наједноставните игри – **игрите со два играчи и нула сума** – се играат со два играчи (две армии, два тима, две компании итн.) и при тоа едниот играч победува, а другиот губи, па сумата од нивните нето победи е нула.

Игра со два играчи и нула сума

- **Пример 1.** (**Игра – Непарни и парни**) Играчите истовремено покажуваат еден или два прста. Ако покажале ист број на прсти, односно збирот на бројот на прсти е парен број, тогаш играчот 1 победува, на пример, добива 1$ од играчот 2. Ако покажале различен број на прсти, односно збирот на прсти е непарен, тогаш играчот 1 губи, му плаќа 1$ на играчот 2.
- Секој од играчите има **две стратегии**: да покаже или еден прст (стратегија 1) или два прста (стратегија 2). Во табелата се дадени исплатите (во долари) за играчот 1.
- (**Исплатите за играчот 2 се спротивните на тие кои се дадени во табелата, затоа што играта е со нула сума.**)

Стратегија		Играч 2	
		1	**2**
Играч 1	**1**	1	- 1
	2	- 1	1

Игра со два играчи и нула сума

- Во општ случај, една игра со два играча е окарактеризирана со:
  1. Стратегии за играчот 1
  2. Стратегии за играчот 2
  3. Табела на исплати (payoffs)
- Пред да почне играта и двата играча ги знаат своите стратегии, стратегиите на противникот и табелата на исплати. Играта се состои во тоа што играчите истовремено избираат стратегија, без да знаат за изборот на противникот.
- **Стратегија** е предодредено правило кое комплетно одредува како некој би одговорил на секоја можна околност во секој чекор на играта.
- **Табелата на исплати** ги покажува добивките (позитивни или негативни) за играчот 1 за секоја комбинација на стратегии за двата играча. Исплатите за играчот 2 се спротивните на тие кои се дадени во табелата.

Игра со два играчи и нула сума

- Основната цел на теоријата на игри и развинање на **рационален критериум** за избор на стратегија.
- **Основни претпоставки** во теоријата на игри се:
  1. Двата играча се рационални.
  2. Двата играчи ја избираат својата стратегија единствено за сопствена благосостојба (без никакво сочувство кон противникот).
- Теоријата на игри е во контраст со анализата на одлучување, каде се претпоставува дека доносителот на одлучи игра игра со пасивен протовник – природата – која ги одбира своите стратегии на случаен начин.

Решавање на едноставна игра

- **Пример 2.** Двајца политичари се кандидираат за членови на сенатот. Остануваат уште два дена до изборите, потребно е да се направи план за политичките кампањи во тие денови. И двајцата сакаат последните два дена да ги поминат во двата клучни града А и Б. Имаат можност да поминат по еден цел ден во двата града или во еден од градовите да поминат два цели дена. Бидејќи треба да се направат претходни резервации, однапред треба да одлучат за распоредот, незнаејќи ја одлуката на противникот.
- **Формулирање на играта: одредување на двата играча (двајцата политичари), стратегиите за секој од играчите и табелата на исплати.**
- Секој од играчите има три стратегии:
  Стратегија 1 = помини по 1 ден во секој од двата града
  Стратегија 2 = помини ги двата дена во градот А
  Стратегија 3 = помини ги двата дена во градот Б

Решавање на едноставна игра

- Од гледна точка на политичарите, целта е добивање на гласови, па секој глас има иста вредност. Затоа, во **табелата со исплати** ќе бидат прикажани број на гласови кои политичарот 1 ќе ги добие од политичарот 2 при соодветниот избор на стратегии (изразени во 1000 гласови).

Стратегија		Политичар 2		
		1	2	3
Политичар 1	1			
	2			
	3			

- Ќе разгледаме три варијанти на табелата на исплати, како и соодветните начини за решавање на играта.

Решавање на едноставна игра – Варијанта 1 (доминантни стратегии)

- Решението на играта ќе може да се најде со примена на концептот на **доминантни стратегии**, односно исфрлање на инфериорните стратегии сè додека не остане еден избор.

Стратегија		Политичар 2		
		1	**2**	**3**
Политичар 1	**1**	1	2	4
	2	1	0	5
	3	0	1	-1

- Една стратегија е **доминирана** од втора стратегија, ако втората стратегија секогаш е барем исто толку добра (а може и подобра) независно од тоа што противникот ќе направи. Доминираната стратегија може веднаш да биде елиминирана и понатаму да не се разгледува.

Решавање на едноставна игра – Варијанта 1 (доминантни стратегии)

- Стратегијата 3 за играчот 1 е доминирана од стратегијата 1 (1 > 0, 2 > 1, 4 > -1). Ја елиминираме стратегијата 3 за играчот 1.

Стратегија		Политичар 2		
		1	**2**	**3**
Политичар 1	**1**	1	2	4
	2	1	0	5

- Сега играчот 2 има доминирана стратегија – стратегијата 3 на играчот 2 е доминирана од стратегијата 1 и стратегијата 2 (1 < 4, 1 < 5, но исти така 2 < 4, 0 < 5). Ја елиминираме стратегијата 3 за играчот 2.

Стратегија		Политичар 2	
		1	**2**
Политичар 1	**1**	1	2
	2	1	0

Решавање на едноставна игра – Варијанта 1 (доминантни стратегии)

- Сега стратегијата 2 за играчот 1 е доминирана од стратегијата 1 (1 >= 1, 2 > 0), па ја елиминираме.

Стратегија		Политичар 2	
		1	**2**
Политичар 1	**1**	1	2

- Стратегијата 2 за играчот 2 е доминирана од стратегијата 1 (1 < 2) и ја елиминираме.

Стратегија		Политичар 2
		1
Политичар 1	1	1

- Следствено, и двата играчи треба да ја играат стратегијата 1. Во тој случај играчот 1 ќе добие исплата со вредност 1 од играчот 2 (т.е. политичатот 1 ќе добие 1000 гласа од политичарот 2).
- Исплатата за играчот 1, кога и двата играчи играат оптимални стратегии, се нарекува **вредност на играта**. Играта која има вредност 0 е **фер игра**. Оваа игра нема вредност 0, значи не е фер игра.

Решавање на едноставна игра – Варијанта 2 (стабилно решение)

- Во следната табела на исплати за играчот 1 нема доминирани стратегии ниту за играчот 1, ниту за играчот 2.

Стратегија		Политичар 2		
		1	2	3
Политичар 1	1	-3	-2	6
	2	2	0	2
	3	5	-2	-4

- Ако играчот 1 ја одбере стратегијата 2, таа за него претставува **најдобра гаранција** дека нема ништо да изгуби, дури може и да добие.
- Играчот 2 најмалку може да изгуби при избор на стратегијата 2. Од исти причини, **најдобра гаранција** против рационален проетивник е играчот 2 да ја одбере стратегијата 2.

Решавање на едноставна игра – Варијанта 2 (стабилно решение)

- Секој од играчите игра за да ги **минимизира неговите максимални загуби (Minimax критериум).** Според овој критериум, играчот 1 треба да ја избере стратегијата чија минимална исплата е најголема (maximin), а играчот 2 треба да ја одбере стратегијата чија максимална исплата за играчот 1 е најмала (minimax).

Стратегија		Политичар 2			
		1	**2**	**3**	**Minimum**
Политичар 1	**1**	-3	-2	6	-3
	2	2	0	2	0 (maximin)
	3	5	-2	-4	-4
Maximum		5	0 (minimax)	6	

Решавање на едноставна игра – Варијанта 2 (стабилно решение)

- Да забележиме дека иста вредност во табелата со исплати е и minimax за играчот 1 и maximin за играчот 2, имено таа вредност истовремено е минимум за нејзината редица, и максимум за нејзината колона и се нарекува **седлеста точка**.
- Ако една игра поседува седлеста точка, тогаш таа игра има **стабилно решение** (**еквилибриум**) во кое ниеден од играчите не може да ја искористи стратегијата на противникот за да си ја подобри сопствената позиција.

Решавање на едноставна игра – Варијанта 3 (нестабилно решение)

- Нека е дадена следната табела на исплати и нека и двата играчи го примениле Minimax критериумот.

Стратегија		Политичар 2			
		1	**2**	**3**	**Minimum**
Политичар 1	**1**	0	-2	2	-2 (maximin)
	2	5	4	-3	-3
	3	2	3	-4	-4
Maximum		5	4	2 (minimax)	

- Да забележиме дека во тој случај не се еднакви maximin вредноста (-2) и minimax вредноста (2), значи **нема седлеста точка**.

Решавање на едноставна игра – Варијанта 3 (нестабилно решение)

- Иако играта се игра само еднаш, секој избор на стратегија го остава играчот со мотив за менување на стратегијата, било да ја искористи предноста над противникот или да го спречи противниот да ја искористи предноста над него.
- Првопредложеното решение, играчот 1 да ја игра стратегијата 1, а играчот 2 да ја игра стратегијата 3 е **нестабилно решение**. Потребно е да се развие позадоволително решение.
- Во општ случај, кај игрите кај кои нема седлеста точка, потребно е развивање на веројатносни процедури за наоѓање ан решението.

Игри со мешани стратегии

- Секогаш кога играта нема седлеста точка, теоријата на игри советува секој играч да додели веројатносна распределба на своите стратегии.

x_i = веројатноста дека играчот 1 ќе ја користи стратегијата i ($i = 1, 2, \ldots, m$)

y_j = веројатноста дека играчот 2 ќе ја користи стратегијата j ($j = 1, 2, \ldots, n$)

каде m и n се бројот на достапни стратегии за играчот 1, односно играчот 2. Бидејќи тоа се веројатности, треба да се ненегативни и нивниот збир да е 1, т.е. $x_1 + \ldots + x_m = 1$ и $y_1 + \ldots + y_n = 1$.

- Плановите $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ се нарекуваат **мешани стратегии**, додека претходните стратегии се **чисти стратегии**.

Игри со мешани стратегии

- Кога играта се игра, секој играч всушност користи една од своите чисти стратегии, но ја избира на случаен начин врз основа на веројатнисната распределба одредена со мешаните стратегии.
- На пример, нека играчите во варијантата 3 ги избрале мешаните стратегии (x1, x2, x3) = (1/2, 1/2, 0) и (y1, y2, y3) = (0, 1/2, 1/2). Тоа значи, дека при играње на играта, секој играч ќе фрла монета за да одреди која од двете прифатливи стратегии (тие со ненулта веројатност) да ги примени.
- Мерка за евалуација на мешаните стратегии е **очекуваната исплата**.

Очекувана исплата за играчот 1 = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j$

каде pij е исплатата за играчот 1 кога тој ја користи стратегијата i, а играчот 2 ја користи стратегијата j.

За примерот, очекуваната исплата за играчот 1 е (-2)*1/4+2*1/4+4*1/4+(-3)*1/4=1/4

Игри со мешани стратегии

- Со помош на очекуваната исплата, Minimax критериумот се проширува од игри со чисти стратегии на игри со мешани стратегии, при што играчот треба да ја одбере мешаната стратегија која ќе ја минимизира неговата очекувана максимална загуба.
- $\underline{v}$ - најдобра минимална очекувана исплата (најголемата од најмалите очекувани исплата која може да произлезе од било која мешана стратегија на противникот) за играчот 1
- $\overline{v}$ - најдобра максимална очекувана загуба (најмала од најголемите очекувани загуби која може да произлезе од било која мешана стратегија на противникот) за играчот 2
- Кај нестабилни игри со чисти стратегии важи $\underline{v} < \overline{v}$

Игри со мешани стратегии

- **Minimax теорема:** Ако се дозволени мешани стратегии, парот мешани стратегии кои се оптимални според Minimax критериумот обезбедува стабилно решение со $\underline{v} = v = v$ (вредност на играта), така што никој од играчите не може да игра подобро ако еднострано ја менува својата стратегија.
- И при сознание дека постојат оптимални мешани стратегии, сепак кога играта се игра еднаш, потребно е да се направи избор на една чиста стратегија која ќе се игра. Изборот се прави врз основа на **оптималната веројатноста распределба** за мешаните стратегии.
- Оптималната мешана стратегија може да се најде со графичка процедура доколку еден од играчите има две стратегии или со помош на **задача на линеарно програмирање**.

Оптимална мешана стратегија (графичко решение)

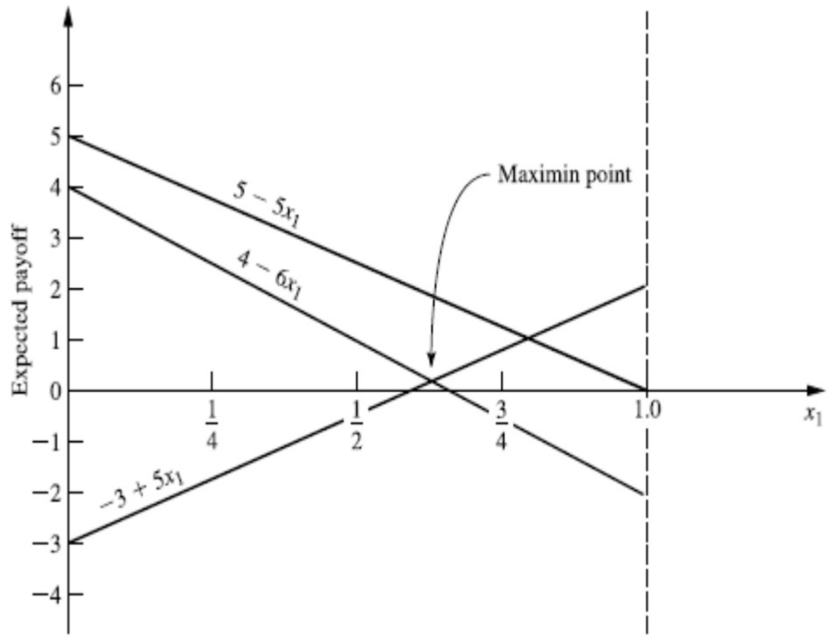
- Нека имаме игра во која по отстранувањето на доминираните стратегии, на еден од играчите му останале две стратегии за игра. Во варијантата 3, стратегијата 3 на играчот 1 е доминирана од стратегијата 2, па ја елиминираме. Сега, играчот 1 има две стратегии, па неговата мешана стратегија ја означуваме со (x1, 1 - x1).

			Политичар 2		
		Веројатност	**y1**	**y2**	**y3**
	Веројатност	**Чиста стратегија**	**1**	**2**	**3**
Политичар 1	**x1**	1	0	-2	2
	1 – x1	2	5	4	-3

Оптимална мешана стратегија (графичко решение)

- Очекуваната исплата за играчот 1, при чисти стратегии за играчот 2 е

(y_1, y_2, y_3)	Очекувана исплата
(1, 0, 0)	$0x_1 + 5(1 – x_1) = 5 – 5x_1$
(0, 1, 0)	$-2x_1 + 4(1 – x_1) = 4 – 6x_1$
(0, 0, 1)	$2x_1 - 3(1 – x_1) = -3 + 5x_1$



Оптимална мешана стратегија (графичко решение)

- За секои дадени вредности x_1 и (y_1, y_2, y_3), очекуваната исплата ќе биде тежинска средина на соодветните точки од овие прави, поточно

$$\text{Очекувана исплата за играчот 1} = y_1(5 - 5x_1) + y_2(4 - 6x_1) + y_3(-3 + 5x_1)$$

- Да се потсетиме дека играчот 2 сака да ја минимизира очекуваната исплата на играчот 1. За дадена вреднист x_1, играчот 2 ќе ја минимизира оваа очекувана исплата, ако ја одбере чистата стратегија која има најмала вредност за даденото x_1 (графички тоа е најдолната права). За нашиот пример, правата $5 - 5x_1$ се елиминира од сам почеток бидејќи за секое x_1 постои права која е под неа. Следствено, играчот 1 сака да ј максимизира својата минимална очекувана исплата, па треба да ја избере онаа вредност за x_1 за која долните прави достигнуваат врв, а тоа е во нивнот пресек:

$$-3 + 5x_1 = 4 - 6x_1 \;\Rightarrow\; x_1 = 7/11 \;\Rightarrow\; x_2 = 1 - x_1 = 4/11$$

- Значи, оптималната мешана стратегија за играчот 1 е (x_1^*, x_2^*) = (7/11, 4/11) и $\underline{v} = v = -3 + 5(7/11) = 2/11$ е вредностана играта.

Оптимална мешана стратегија (графичко решение)

- За оптималната стратегија (y_1, y_2, y_3) важи

$$y1(5 - 5x1) + y2\left(4 - 6x1\right) + y3\left(-3 + 5x1\right) \leq \bar{v} = v = 2/11$$

за сите $0 \leq x_1 \leq 1$. Кога играчот 1 игра оптимално ($x_1 = 7/11$), неравенството преминува во равенство, па добиваме

$$20/11\ y_1 + 2/11\ y_2 + 2/11\ y_3 = v = 2/11$$

Исто така имаме дека $y_1 + y_2 + y_3 = 1$.

- Заклучуваме дека $y_1 = 0$ затоа што одговара на линија која не поминува низ maximin точката и мора на неа да ѝ се додели тежина 0 за да се избегне зголемување на очекуваната исплата над оваа точка.

Оптимална мешана стратегија (графичко решение)

- Добивме дека

$$y2(4 - 6x1) + y3(-3 + 5x1)\begin{cases} \leq \frac{2}{11} & ,0 \leq x1 \leq 1 \\ = \frac{2}{11} & ,x1 = \frac{7}{11} \end{cases}$$

- Левата страна на последното равенство е права која има ординатна вредност 2/11 за x1 = 7/11 и која не смее да ја надмине таа вредност, па таа мора да е хоризонатална права. (Овој заклучок секогап важи, освен која оптималната вредност на x1 е 0 или 1.) Затоа,

$$y2(4 - 6x1) + y3(-3 + 5x1) = 2/11$$ за сите 0 ≤ x1 ≤ 1.

Оптимална мешана стратегија (графичко решение)

- Заменуваме за две вредности на x1, на пример 0 и 1, и добиваме

$$4y_2 - 3y_3 = 2/11$$
$$-2y_2 + 2y_3 = 2/11$$

чие решение е y2=5/11, y3=6/11.

- Оптималната мешана стратегија за играчот 2 е (y1*, y2*, y3*) = (0, 5/11, 6/11).

Оптимална мешана стратегија (линеарно програмирање)

x3 – минимална очекувана исплата

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad x_3\\
&5x_2 - x_3 \geq 0\\
&-2x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 0\\
&2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 0\\
&x_1 + x_2 = 1\\
&x_1 \geq 0\\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(x1*,x2*,x3*) = (7/11, 4/11, 2/11)

y4 – максимална очекувана загуба

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} \quad y_4\\
&-2y_2 + 2y_3 - y_4 \leq 0\\
&5y_1 + 4y_2 - 3y_3 - y_4 \leq 0\\
&y_1 + y_2 + y_3 = 1\\
&y_1 \geq 0\\
&y_2 \geq 0\\
&y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(y1*, y2*, y3*, y4*) = (0, 5/11, 6/11, 2/11)