4

Оценување на параметри

4.1 Точкасти оценувачи

Нека обележјето X има функција на распределба F која припаѓа на фамилиијата допустливи функции на распределби

$$\mathcal{P} = \{F(x, \theta) : \theta \in \Theta\},$$

каде θ е векторот од непознати параметри и Θ е просторот од параметри (види Пример 3.1-3.3). Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Еден начин за оценување на вредноста на непознатиот параметар θ е со помош на точкасти оценувачи.

Дефиниција 4.1. Нека $\widehat{\theta} = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ е статистика која како функција не зависи од оценуваниот параметар или други непознати параметри, туку зависи само од случајните променливи од примерокот и познати константи, и при тоа за секоја реализација $(x_1, x_2, ..., x_n)$ на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$ важи $U(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Theta$. Тогаш, велиме дека $\widehat{\theta}$ е **точкаст оценувач** или само **оценувач** за непознатиот параметар θ.

Секоја вредност $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ која се добива за конкретна реализација $(x_1, x_2, ..., x_n)$ на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$ се нарекува **точкаста оценка** или само **оценка** за непознатиот параметар θ.

Пример 4.1. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X кое има $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ распределба. Статистиката $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ може да се земе за оценувач на параметарот m, но не може да биде оценувач за σ^2 затоа што просторот од параметри за σ^2 се состои од позитивни броеви, додека $\overline{X}_n$ може да прими и негативна вредност за конкретна реализација на примерокот. Но зато статистиката $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ може да биде оценувач за σ^2.

Еден начин за добивање на оценувачи е со **принципот на замена** кој претпоставува дека непознатиот параметар θ може да се претстави во облик на функционал од функцијата на распределба F на обележјето X, т.е. $\theta = \theta(F)$. На пример, ако математичкото очекување $m = EX$ е непознатиот параметар кој сакаме да го оцениме, може да го запишеме како функционал од F на следниот начин

$$m(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Тогаш, зависноста на θ од функцијата на распределба F ни сугерира дека проблемот на наоѓање на оценувач за θ може да се сведе на наоѓање на добар оценувач $\widehat{F}$ на F и потоа да се замени овој оценувач на местото од F и на тој начин би се добил оценувач за θ, $\widehat{\theta} = \theta(\widehat{F})$. Принципот на замена подразбира за оценувач на F да се земе емпириската фунција на распределба на примерокот F_n (види Дефиниција 3.1), т.е. $\widehat{F} = F_n$.

Пример 4.2. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X кое има функција на распределба F. Со принципот на замена оценувач за математичкото очекување на X, $m(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ е

$$\widehat{m} = m(\widehat{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} x d\widehat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n,$$

оценувач за дисперзијата на X, $\sigma^2(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)\Big)^2$ е

$$\widehat{\sigma}^2 = \sigma^2(\widehat{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\widehat{F}(x) - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x d\widehat{F}(x)\Big)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2 = \overline{S}_n^2.$$

И покрај фактот дека емпириската функција на распределба на примерокот F_n рамномерно конвергира скоро сигурно кон функцијата на распределба F на обележјето X (Централна теорема на математичката статистка, Теорема 3.2), не може да се каже дека F_n е добар оценувач за F. На пример, F_n секогаш има дискретна распределба и ако вистинската распределба на F е непрекината, тогаш F_n нема да може да опфати одредени особини на F. Така, ако сакаме да ја оцениме густината на распределба p на обележјето X, тогаш ја користиме врската меѓу гистината на распределба и финкцијата на распределба, т.е.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u) du,$$

па природно се наметнува да оценувачот $\widehat{p}$ за густината p добиен со принципот на замена го задоволува равенството

$$\widehat{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} \widehat{p}(u) du,$$

но таков оценувач не постои затоа што $\widehat{F} = F_n$ е скалеста функција. Во тој случај се применува "поглаток" оценувач за F и за него се применува принципот на замена.

Исто така може да се случи оценувачот добиен со принципот на замена и во случај кога не се работи за непрекинато обележје X да не може експлицитно да се дефинира.

Пример 4.3. Нека $\theta(F)$ го задоволува равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x, \theta(F)) dF(x) = 0,$$

за некоја функција $g(x, u)$. Тогаш, оценувачот добиен со принципот на замена $\widehat{\theta} = \theta(\widehat{F})$, каде $\widehat{F} = F_n$ го задоволува равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x, \theta(F)) d\widehat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i, \widehat{\theta}) = 0.$$

Па, во овој случај $\widehat{\theta}$ не е задолжително експлицитно дефиниран.

4.1.1 Непристрасни оценувачи

Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X кое има функција на распределба F која припаѓа на фамилијата допустливи распределби $\mathcal{P} = \{F(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$. Нека $\widehat{\theta} = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ е оценувач за параметарот θ.

Идеално сакаме распределбата на $\widehat{\theta}$ да биде концентрирана во околина на вистинската вредност на оценуваниот параметар θ. Постојат неколку едноставни мерки за квалитетот на еден оценувач базирани на неговата распределба. Првата мерка е пристрасноста на $\widehat{\theta}$, која е показател дали распределбата на $\widehat{\theta}$ е центрирана околу θ.

Дефиниција 4.2. Пристрасност (bias) на оценувачот $\widehat{\theta}$ се дефинира како

$$b(\widehat{\theta}) = E(\widehat{\theta}) - \theta. \tag{4.1}$$

За еден оценувач $\widehat{\theta}$ велиме дека е **непристрасен** (unbiased) или **центриран**, ако $b(\widehat{\theta}) = 0$, односно ако $E(\widehat{\theta}) = \theta$.

Пример 4.4. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X со $EX = m$ и $DX = \sigma^2$. Тогаш,

а) статистиката $\overline{X}_n$ е непристрасен оценувач за m затоа што $E(\overline{X}_n) = m$ (види Својство 3.1 а)).

б) статистиката $\overline{S}_n^2$ не е непристрасен оценувач за σ^2 затоа што $E(\overline{S}_n^2) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2$ (види Својство 3.1 б)).

в) статистиката $S_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{S}_n^2$ е непристрасен оценувач за σ^2 затоа што $E(S_n^2) = E(\frac{n}{n-1}\,\overline{S}_n^2) = \frac{n}{n-1}\,E(\overline{S}_n^2) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{(n-1)}{n}\,\sigma^2 = \sigma^2$.

Едни од поголемите проблеми поврзани со поимот на непристрасност се тие дека непристрасните оценувачи не постојат секогаш (Пример 4.5) и дека непристрасните оценувачи не се инваријантни за трансформациите на непознатите параметри, односно ако $\widehat{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ и $g:\Theta\to\Theta$ е некое пресликување од просторот на параметри во самиот себе, тогаш оценувачот $\vartheta = g(\theta)$ може да не е непристрасен оценувач за θ (Пример 4.6), освен ако g не е линеарна функција (Својство 4.1).

Пример 4.5. Нека обележјето X има $\mathcal{P}(\theta)$ распределба, односно

$$P\{X=k\} = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta},\ k=0,1,2,...,$$

каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Тогаш, врз основа на примерок со обем 1 не може да се дефинира непристрасна оценка за $\vartheta = 1/\theta$. Имено, да претпоставиме дека статистиката $\widehat{\vartheta} = U(X_1)$ е непристрасна оценка за ϑ. Тогаш, за секој $\theta > 0$ важи

$$\frac{1}{\theta} = E(U(X_1)) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta},$$

од каде добиваме дека $e^{\theta} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} U(k)\frac{\theta^{k+1}}{k!}$. Но, од друга страна $e^{\theta} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}$, од каде заклучуваме дека $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} U(k)\frac{\theta^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}$, што не е можно. Значи не постои непристрасен оценувач за $\vartheta = 1/\theta$.

Пример 4.6. Нека обележјето X има конечни $EX = m$ и $DX = \sigma^2$. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Покажавме дека $E(\overline{X}_n) = m$ и $D(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ (Својство 3.1). Од тука следува дека

$$E(\overline{X}_n^2) = D(\overline{X}_n) + E(\overline{X}_n)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + m^2.$$

Значи, $\overline{X}_n$ е непристрасен оценувач за m, но $\overline{X}_n^2$ не е непристрасем оценувач за m^2.

Својство 4.1. *Ако $\widehat{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ, тогаш $\widehat{\vartheta} = a\widehat{\theta} + b$ е непристрасен оценувач за $\vartheta = a\theta + b$, каде a и b се познати константи.*

Доказ. Од услов имаме дека $E(\widehat{\theta}) = \theta$. Па,

$$E(\widehat{\vartheta}) = E(a\widehat{\theta} + b) = aE(\widehat{\theta}) + b = a\theta + b = \vartheta,$$

од каде следи дека $\widehat{\vartheta}$ е непристрасен оценувач за ϑ, што требаше да се покаже. ∎

Во случај на голем примерок (кога $n \to \infty$) има смисла да се зборува за асимптотски непристрасен оценувач.

Дефиниција 4.3. Ако за оценувачот $\widehat{\theta}_n$ важи

$$\lim_{n\to\infty} E(\widehat{\theta}_n) = \theta \tag{4.2}$$

тогаш велиме дека тој е **асимптотски непристрасен оценувач**.

Понекогаш, самиот облик на асимптотскиот непристрасен оценувач дозволува тој да може да се корегира во непристрасен.

Пример 4.7. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X со $EX = m$ и $DX = \sigma^2$.

а) Во Пример 4.4 покажавме дека статистиката $\overline{S}_n^2$ не е непристрасен оценувач за σ^2, но бидејќи $E(\overline{S}_n^2) = \dfrac{(n-1)\sigma^2}{n} \to \sigma^2$, кога $n \to \infty$, следи дека $\overline{S}_n^2$ е асимптотски непристрасен оценувач за σ^2. Неговата корекција до непристрасност е статистиката $S_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{S}_n^2$.

б) Ако тргнеме од непристрасниот оценувач S_n^2 за σ^2 и сакаме да добиеме оценувач за σ кој би го задржал својството за непристрасност, некако ни се наметнува идејата дека тоа може да биде оценувачот $S_n = \sqrt{S_n^2}$. Меѓутоа, од Теорема 3.3 имаме

$$Y = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1},$$

од каде следи дека

$$E(S_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\, E(\sqrt{Y}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\, \frac{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \neq \sigma$$

(покажи!), од каде заклучуваме дека S_n не е непристрасен оценувач за σ (уште еден пример дека непристрасните оценувачи не се инваријантни за трансформациите на непознатите параметри). Но, бидејќи $E(S_n) \to \sigma$, кога $n \to \infty$ (покажи!), следи дека S_n е асимптотски непристрасен оценувач за σ и тој лесно може да се корегира до непристрасност.

4.1.2 Оценувачи со минимална дисперзија

Постојат случаи кога во потрага за подобар оценувач за θ може да одбереме пристрасен оценувач отколку непристрасен, затоа што првиот имал помала дисперзија. Едни од мерките за расејување на распределбата на $\widehat{\theta}$ околу θ се средната апсолутна грешка (MAE - mean absolute error) и средната квадратна грешка (MSE - mean square error), погодни за споредба на различни оценувачи за θ.

Дефиниција 4.4. Средна апсолутна грешка (MAE) на оценувачот $\widehat{\theta}$ се дефинира како

$$MAE(\widehat{\theta}) = E|\widehat{\theta} - \theta|. \tag{4.3}$$

Дефиниција 4.5. Средна квадратна грешка (MSE) на оценувачот $\widehat{\theta}$ се дефинира како

$$MSE(\widehat{\theta}) = E(\widehat{\theta} - \theta)^2. \tag{4.4}$$

Бидејќи сакаме $\widehat{\theta}$ да биде близу до θ, природно е да прифатиме оценувач со помала вредности за MAE или MSE. При споредби на различни оценувачи на θ обично повеќе се користи MSE отколку MAE. Ова се должи на следната декомпозиција на $MSE(\widehat{\theta})$,

$$MSE(\widehat{\theta}) = E(\widehat{\theta}^2) - 2\theta E(\widehat{\theta}) + \theta^2 - E(\widehat{\theta})^2 + E(\widehat{\theta})^2 = D(\widehat{\theta}) + (b(\widehat{\theta}))^2. \tag{4.5}$$

За непристрасен оценувач $\widehat{\theta}$ за параметарот θ имаме дека $MSE(\widehat{\theta}) = D(\widehat{\theta})$.

Често важи тоа дека распределбата на еден оценувач $\widehat{\theta}$ е приближно нормална со математичко очекување θ и дисперзија $\sigma^2(\theta)/n$. Во тие случаи, дисперзијата се апроксимира добро со $MSE(\widehat{\theta})$, бидејќи компонентата на дисперзија на MSE е многу поголема отколку компонентата на пристрасност (во равенството (4.5)), па затоа $MSE(\widehat{\theta}) \approx D(\widehat{\theta})$. Но, исто така важно е да се забележи дека MSE на еден оценувач може да биде бесконечна дури и кога неговата распределба е приближно нормална.

Дефиниција 4.6. Нека $\widehat{\theta} = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $\widetilde{\theta} = V(X_1, X_2, ..., X_n)$ се оценувачи за параметарот θ. Тогаш, велиме дека оценувачот $\widehat{\theta}$ е **подобар оценувач** од $\widetilde{\theta}$, ако за секој $\theta \in \Theta$ важи $MSE(\widehat{\theta}) < MSE(\widetilde{\theta})$.

Заради дискусијата по равенството (4.5), во случај на непристрасни оценувачи, претходната дефиниција може да се запише во следниот облик.

Дефиниција 4.6а. Нека $\widehat{\theta} = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $\widetilde{\theta} = V(X_1, X_2, ..., X_n)$ се два непристрасни оценувачи за параметарот θ. Тогаш, велиме дека оценувачот $\widehat{\theta}$ е **подобар оценувач** од $\widetilde{\theta}$, ако за секој $\theta \in \Theta$ важи $D(\widehat{\theta}) < D(\widetilde{\theta})$.

Пример 4.8. Нека обележјето X има $\mathcal{P}(\theta)$ распределба, каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Тогаш, статистиките $\overline{X}_n$ и S_n^2 се непристрасни оценувачи за θ (покажи!). За нивните дисперзии имаме

$$D(\overline{X}_n) = \frac{\theta}{n}, \quad D(S_n^2) = \frac{\theta}{n(n-1)^2}(n^2(2\theta+1) - 2n(\theta+1) + 1)$$

(покажи!), од каде се гледа дека за секој $n \in \mathbb{N}$ и секој $\theta > 0$ важи $D(\overline{X}_n) < D(S_n^2)$ (покажи!), значи $\overline{X}_n$ е подобар оценувач за θ од S_n^2.

Се поставува прашањето дали во класата на непристрасни оценувачи за некој параметар θ постои оценувач чија дисперзија не е поголема од истата кај останатите непристрасни оценувачи од класата. Имено, таков оценувач не секогаш постои, но ако постои тогаш е единствен со веројатност 1.

Дефиниција 4.7. Нека со $\mathcal{N}(\theta)$ ја означиме класата од сите непристрасни оценувачи за параметарот θ. Оценувачот $\widehat{\theta} \in \mathcal{N}(\theta)$ за кој важи

$$D(\widehat{\theta}) \leq D(\widetilde{\theta}), \text{ за секој } \theta \in \Theta \text{ и } \widetilde{\theta} \in \mathcal{N}(\theta)$$

велиме дека е непристрасен **оценувач со минимална дисперзија.**

Теорема 4.1. *Нека* $\widehat{\theta} = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ *и* $\widetilde{\theta} = V(X_1, X_2, ..., X_n)$ *се два оценувачи за* θ *со минимална дисперзија. Тогаш, за секој* $\theta \in \Theta$ *важи* $P\{\widehat{\theta} = \widetilde{\theta}\} = 1$.

Доказ. Означуваме со $d = D\widehat{\theta} = D\widetilde{\theta}$ и $\overline{\theta} = (\widehat{\theta} + \widetilde{\theta})/2$. Ќе покажеме дека $\overline{\theta}$ е оценувач за θ со минимална дисперзија. Од

$$E(\overline{\theta}) = E((\widehat{\theta} + \widetilde{\theta})/2) = (E(\widehat{\theta}) + E(\widetilde{\theta}))/2 = (\theta + \theta)/2 = \theta,$$

значи $\overline{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ. Потоа, бидејќи d е минималната дисперзија за еден оценувач за θ следи дека

$$D(\overline{\theta}) \geq d. \tag{4.6}$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned} D(\overline{\theta}) &= D(\frac{\widehat{\theta} + \widetilde{\theta}}{2}) = \frac{1}{4}\,(D\widehat{\theta} + 2cov(\widehat{\theta}, \widetilde{\theta}) + D\widetilde{\theta}) \leq \\ &\leq \frac{1}{4}\,(D\widehat{\theta} + 2\sqrt{\widehat{\theta} \cdot \widetilde{\theta}} + D\widetilde{\theta}) = \frac{1}{4}\,(d + 2\sqrt{d \cdot d} + d) = d, \end{aligned}$$

што значи

$$D(\overline{\theta}) \leq d. \tag{4.7}$$

Од (4.6) и (4.7) имаме дека $D(\overline{\theta}) = d$ и важи равенство во (4.7), од каде имаме дека $cov(\widehat{\theta}, \widetilde{\theta}) = d$, и затоа

$$D(\widehat{\theta} - \widetilde{\theta}) = D\widehat{\theta} - 2cov(\widehat{\theta}, \widetilde{\theta}) + D\widetilde{\theta} = d - 2d + d = 0.$$

Од последното равенство имаме дека $P\{\widehat{\theta} - \widetilde{\theta} = c\} = 1$ за некоја констаната c. Од $E\widehat{\theta} = E\widetilde{\theta} = \theta$ следи дека $c = 0$, па $P\{\widehat{\theta} = \widetilde{\theta}\} = 1$, што требаше да се докаже. ■

4.1.3 Конзистентни оценувачи

Нека $\widehat{\theta}_n = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ е оценувач за параметарот θ. Пожелно е распределбата на $\widehat{\theta}_n$ да се концентрира околу вистинската вредност на параметарот θ со зголемување на n. Ова својство на оценувачот $\widehat{\theta}_n$ е познато како конзистентност.

Дефиниција 4.8. Оценувачот $\widehat{\theta}_n$ велиме дека е **конзистентен оценувач** или **стабилен оценувач** за θ, ако за секој $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1, \tag{4.8}$$

што значи дека $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$.

Да забележиме дека индексот n во $\widehat{\theta}_n$ ја истакнува улогата на големината n на примерокот.

Пример 4.9. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X со конечни $EX = m$ и $DX = \sigma^2$. Тогаш, непристрасниот оценувач S_n^2 за σ^2 е и конзистентен оценувач за σ^2 (покажи!).

Својство 4.2. *Нека $\widehat{\theta}_n = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ е конзистентен оценувач за θ и $\{c_n\}$ е низа реални броеви така што $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Тогаш, и оценувачот $\widetilde{\theta}_n = \widehat{\theta}_n + c_n = U(X_1, X_2, ..., X_n) + c_n$ е конзистентен оценувач за θ.*

Доказ. Нека $\varepsilon, \eta > 0$. Од $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ и $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, имаме дека $\exists n_0$, така што $\forall n \geq n_0$,

$$P\{|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon/2\} > 1 - \eta, \tag{4.9}$$

$$|c_n| < \varepsilon/2. \tag{4.10}$$

Да забележиме дека

$$|\widetilde{\theta}_n - \theta| = |\widehat{\theta}_n + c_n - \theta| \leq |\widehat{\theta}_n - \theta| + |c_n|. \tag{4.11}$$

Тогаш, ако $|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon/2$, од (4.10) и (4.11) ќе следи дека $|\widetilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Значи,

$$P\{|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon/2\} \leq P\{|\widetilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} \leq 1. \tag{4.12}$$

Сега, од (4.9) и (4.12) следи $\widetilde{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, што требаше да се докаже. ■

Во случај кога оценувачот $\widehat{\theta}_n$ има ограничена дисперзија, неговата конзистентност може да се провери со помош на основниот облик на неравенството на Чебишев, односно

$$P\{|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = P\{|\widehat{\theta}_n - \theta|^2 < \varepsilon^2\} \geq 1 - \frac{E(\widehat{\theta}_n - \theta)^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{MSE(\widehat{\theta}_n)}{\varepsilon^2}.$$

Следствено, ако $MSE(\widehat{\theta}_n) \to 0$ тогаш важи (4.8). Потоа, користејќи ја декомпозицијата (4.5) за $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_n$, се добива дека $MSE(\widehat{\theta}_n) \to 0$ ако $D(\widehat{\theta}_n) \to 0$ и $b(\widehat{\theta}_n) \to 0$. Заклучуваме дека во случајот кога $\widehat{\theta}_n$ има ограничена дисперзија, неговата конзистентност може да се провери со проверка на следните услови

$$\text{(а)} \lim_{n\to\infty} E(\widehat{\theta}_n) = \theta, \quad \text{(б)} \lim_{n\to\infty} D(\widehat{\theta}_n) = 0. \tag{4.13}$$

Имено, важи следната теорема.

Теорема 4.2. *Нека $\widehat{\theta}_n = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ е оценувач за кој важат условите (4.13). Тогаш, $\widehat{\theta}_n$ е конзистентен оценувач за θ.*

Конзистентноста базирана на условите (4.13) понекогаш се нарекува **средно-квадратна конзистентност**.

Дефиниција 4.9. Оценувачот $\widehat{\theta}_n$ се нарекува **силно конзистентен оценувач** за θ, ако

$$P\{\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n = \theta\} = 1, \tag{4.14}$$

што значи дека $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\text{с.с.}} \theta$.

Пример 4.10. Според Теорема 3.1 имаме дека емпириската функција на распределба на примерокот F_n е силно конзистентен оценувач за функцијата на распределба F на обележјето X. Од таму и оправдувањето на идејата за принципот на замена како метод за наоѓање на оценувачи.