4

Оценување на параметри

4.1 Непристрасни и конзистентни оценувачи

Задача 4.1. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето $X \sim \mathcal{N}(0, \theta)$, каде $0 < \theta < +\infty$ е непознат параметар. Покажи дека $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ е непристрасен оценувач за θ. Најди ја дисперзијата на $\hat{\theta}$. Дали $\hat{\theta}$ е конзистентен оценувач за θ?

Решение. Од $X \sim \mathcal{N}(0, \theta)$ следи дека бројните карактеристики на обележјето X се $EX = 0$ и $DX = \theta$, од каде и за секоја случајна променлива од примерокот важи $EX_i = 0$ и $DX_i = \theta$, $i = 1, 2, ..., n$, од каде $E(X_i^2) = DX_i + (EX_i)^2 = \theta + 0^2 = \theta$. Тогаш,

$$E(\hat{\theta}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \frac{1}{n}\cdot n\theta = \theta,$$

од каде следи дека $\hat{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ.
Од независноста на $X_1, ..., X_n$, следи дека се независни и $X_1^2, ..., X_n^2$, па за дисперзијата на оценувачот $\hat{\theta}$ имаме

$$D(\hat{\theta}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i^2).$$

Сега, бидејќи густината на распределба на X е $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\, e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$, имаме

$$\begin{aligned} D(X_i^2) &= E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\, dx \, - \theta^2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\Big(-\theta x^3 e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3\theta\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\, dx\Big) - \theta^2 = \\ &= 3\theta\cdot E(X_i^2) - \theta^2 = 3\theta^2 - \theta^2 = 2\theta^2. \end{aligned}$$

Па, бараната дисперзија е

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 2\theta^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot 2\theta^2 = \frac{2\theta^2}{n}.$$

Бидејќи $E(\hat{\theta}) = \theta$ и $D(\hat{\theta}) = \frac{2\theta^2}{n} \to 0$, кога $n \to \infty$, следи дека $\hat{\theta}$ е конзистентен оценувач за θ.
Забелешка. Конзистентноста на $\hat{\theta}$ може да ја покажеме и по дефиниција. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Кога оценувачот е непристрасен може директно да се примени неравенството на Чебишев, односно

$$0 \leq P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} = P\{|\hat{\theta} - E(\hat{\theta})| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2} = \frac{2\theta^2}{n\varepsilon^2} \to 0,\ n \to \infty,$$

од каде $\forall\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$, односно $\forall\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$, па $\hat{\theta}$ е конзистентен оценувач за θ.

Задача 4.2. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X кое има густина на распределба $p(x)$ за која важи $p(\theta - x) = p(\theta + x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Нека $\hat{\theta}$ е оценувач за параметарот θ за кој важи $\hat{\theta}(x_1 + h, ..., x_n + h) = \hat{\theta}(x_1, ..., x_n) + h$, $\forall h \in \mathbb{R}$ и $\hat{\theta}(-x_1, ..., -x_n) = -\hat{\theta}(x_1, ..., x_n)$. Докажи дека, ако постои $E(\hat{\theta})$, тогаш $\hat{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ.

Решение. Нека постои $E(\hat{\theta})$. Ако покажеме дека $E(\hat{\theta}) - \theta = 0$, тогаш $\hat{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ. Од независниста на случајните променливи во примерокот и условите на задачата, имаме

$$E(\hat{\theta}) - \theta = E(\hat{\theta} - \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\theta}(x_1, ..., x_n) - \theta)p(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\theta}(x_1, ..., x_n) - \theta)p(x_1)...p(x_n)dx_1...dx_n = I,$$

каде заради упростување на ознаките $p(x_1, ..., x_n)$ означува густина на распределба на примерокот $(X_1, ..., X_n)$. Ако ја ставиме смената $x_k = y_k + \theta$, $k = 1, ..., n$, а потоа и смената $y_k = -z_k$, $k = 1, ..., n$, од условите на задачата за интегралот I имаме

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\theta}(y_1 + \theta, ..., y_n + \theta) - \theta)p(y_1 + \theta)...p(y_n + \theta)dy_1...dy_n =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(y_1, ..., y_n)p(\theta - y_1)...p(\theta - y_n)dy_1...dy_n =$$
$$= (-1)^n \int_{+\infty}^{-\infty} ... \int_{+\infty}^{-\infty} \hat{\theta}(-z_1, ..., -z_n)p(\theta + z_1)...p(\theta + z_n)dz_1...dz_n =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(-z_1, ..., -z_n)p(\theta + z_1)...p(\theta + z_n)dz_1...dz_n =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(z_1, ..., z_n) p(\theta + z_1)...p(\theta + z_n) dz_1...dz_n =$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\theta}(z_1 + \theta, ..., z_n + \theta) - \theta) p(\theta + z_1)...p(\theta + z_n) dz_1...dz_n = -I.$$

Односно $I = -I$, од каде $I = 0$, па $\hat{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ.

Задача 4.3. Нека $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ се непристрасни оценувачи за параметарот θ добиени од две независни серии на набљудувања. Ако $D(\hat{\theta}_1) = 2D(\hat{\theta}_2)$, одреди ги константите k_1 и k_2 така што $\hat{\theta}_3 = k_1\hat{\theta}_1 + k_2\hat{\theta}_2$ е непристрасен оценувач за θ со минимална дисперзија.

Решение. Од $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ непристрасни оценувачи за θ имаме дека $E(\hat{\theta}_1) = \theta$ и $E(\hat{\theta}_2) = \theta$. И $\hat{\theta}_3$ е непристрасен оценувач за θ, па затоа

$$\theta = E(\hat{\theta}_3) = E(k_1\hat{\theta}_1 + k_2\hat{\theta}_2) = k_1 E(\hat{\theta}_1) + k_2 E(\hat{\theta}_1) = k_1\theta + k_2\theta = (k_1 + k_2)\theta,$$

од каде $k_1 + k_2 = 1$. Од независноста на $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ имаме

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}_3) &= D(k_1\hat{\theta}_1 + k_2\hat{\theta}_2) = k_1^2 D(\hat{\theta}_1) + k_2^2 D(\hat{\theta}_2) = (2k_1^2 + k_2^2) D(\hat{\theta}_2) = \\ &= (2k_1^2 + (1 - k_1)^2) D(\hat{\theta}_2) = (3k_1^2 - 2k_1 + 1) D(\hat{\theta}_2), \end{aligned}$$

од каде $D(\hat{\theta}_3)$ достигнува минимум за $k_1 = \frac{1}{3}$, од каде следи дека $k_2 = 1 - k_1 = \frac{2}{3}$.

Задача 4.4. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето $X \sim \mathcal{U}(0, a)$, каде $a > 0$ е непознат параметар. Покажи дека $\hat{a}_1 = 2\overline{X}_n$, каде $\overline{X}_n$ е средината на примерокот и $\hat{a}_2 = \max\{X_1, ..., X_n\}$ се конзистентени оценувачи за параметарот a.

Решение. Од $X \sim \mathcal{U}(0, a)$ имаме дека густината на распределба на X е $p(x) = \frac{1}{a}$, $x \in (0, a)$, па за бројните карактеристики на X имаме дека се $EX = \frac{a}{2}$ и $DX = \frac{a^2}{12}$, од каде и засекоја случајна променлива од примерокот имаме $EX_i = \frac{a}{2}$ и $DX_i = \frac{a^2}{12}$, $i = 1, ..., n$. Тогаш, за оценувачот $\hat{a}_1 = 2\overline{X}_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ имаме

$$E(\hat{a}_1) = E\Big(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{2} = \frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{a}{2} = a,$$

а заради независноста на случајните променливи во примерокот, имаме

$$D(\hat{a}_1) = D\Big(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{a^2}{12} = \frac{4}{n^2}\cdot n\cdot\frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3n}.$$

Сега, од $E(\hat{a}_1) = a$ и $D(\hat{a}_1) = \frac{a^2}{3n} \to 0$, кога $n \to \infty$, следи дека $\hat{a}_1$ е конзистентен оценувач за a. Да е и забележиме дека $\hat{a}_1$ е и непристрасен оценувач за a.

Ирена Стојковска

За да ги најдеме бројните карактеристики на оценувачот $\hat{a}_2 = \max\{X_1, ..., X_n\}$, прво ја одредуваме неговата распределба. За функцијата на распределба на обележјето X имаме дека е $F(x) = 0$ за $x \leq 0$, $F(x) = \frac{x}{a}$ за $x \in (0, a)$ и $F(x) = 1$ за $x \geq a$. Па, за функцијата на распределба на $\hat{a}_2$ имаме

$$\begin{aligned} F_{\hat{a}_2}(x) &= P\{\hat{a}_2 \leq x\} = P\{\max\{X_1, ..., X_2\} \leq x\} = P\{X_1 \leq x, ..., X_n \leq x\} = \\ &= P\{X_1 \leq x\} \cdot ... \cdot P\{X_n \leq x\} = \underbrace{F(x) \cdot ... \cdot F(x)}_{n} = (F(x))^n = \frac{x^n}{a^n} \text{ за } x \in (0, a), \end{aligned}$$

од каде густината на распределба на $\hat{a}_2$ е

$$p_{\hat{a}_2}(x) = F'_{\hat{a}_2}(x) = \left(\frac{x^n}{a^n}\right)' = \frac{nx^{n-1}}{a^n} \text{ за } x \in (0, a).$$

Тогаш, за математичкото очекување и дисперзијата на $\hat{a}_2$ имаме

$$E(\hat{a}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; p_{\hat{a}_2}(x) \; dx = \int_0^a x \cdot \frac{nx^{n-1}}{a^n} \; dx = \frac{n}{a^n} \int_0^a x^n \; dx = \frac{na}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} a,$$

$$E(\hat{a}_2^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \; p_{\hat{a}_2}(x) \; dx = \int_0^a x^2 \cdot \frac{nx^{n-1}}{a^n} \; dx = \frac{n}{a^n} \int_0^a x^{n+1} \; dx = \frac{na^2}{n+2},$$

$$D(\hat{a}_2) = E(\hat{a}_2^2) - (E(\hat{a}_2))^2 = \frac{na^2}{n+2} - \left(\frac{na}{n+1}\right) = \frac{na^2}{(n+2)(n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

од каде следи дека $\hat{a}_2$ е конзистентен оценувач за a, но не е непристрасен оценувач за a.

Забелешка. Конзистентноста на $\hat{a}_2$ може да ја покажеме и по дефиниција, иако $\hat{a}_2$ не е непристрасен оценувач за a. Нека $0 < \varepsilon < a$ е произволен. Тогаш,

$$\begin{aligned} 1 \quad \geq \quad & P\{|\hat{a}_2 - a| < \varepsilon\} = P\{a - \varepsilon < \hat{a}_2 < a + \varepsilon\} = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} p_{\hat{a}_2}(x) \; dx = \\ = \quad & \int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{nx^{n-1}}{a^n} \; dx = \frac{n}{a^n} \cdot \frac{1}{n} \left(a^n - (a-\varepsilon)^n\right) = 1 - \left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1. \end{aligned}$$

За $\varepsilon > a$, тривијално се покажува дека $P\{|\hat{a}_2 - a| < \varepsilon\} = 1$. Значи, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} P\{|\hat{a}_2 - a| < \varepsilon\} = 1$, па $\hat{a}_2$ е конзистентен оценувач за a.

Задача 4.5. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X кое има Бета распределба со параметри 1 и θ, каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Покажи дека $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}_n} - 1$, каде $\overline{X}_n$ е средината на примерокот, е конзистентен оценувач за параметарот θ.

Решение. Случајната променлива X има Бета распределба со параметри $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, ако има густина на распределба $p(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$, $x \in (0,1)$, каде $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ е Бета функција за која важи $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Математичко очекување и дисперзија на X се $EX = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ и $DX = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$ (покажи!).
Тогаш, за обележјето X кое има Бета распределба со параметри 1 и θ имаме дека $EX = \frac{1}{1+\theta}$ и $DX = \frac{\theta}{(2+\theta)(1+\theta)^2}$.
Бидејќи $X_1, ..., X_n$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со $EX_i = \frac{1}{1+\theta} < +\infty$, $i = 1, ..., n$, од Теоремата на Хинчин, за низата $\{X_i\}$ важи слабиот закон на големите броеви, односно

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{1+\theta} \implies \frac{1}{\overline{X}_n} \xrightarrow{P} 1+\theta \implies \frac{1}{\overline{X}_n} - 1 \xrightarrow{P} \theta \implies \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta,$$

што значи дека $\hat{\theta}$ е конзистентен оценувач за θ.

Задачи за самостојна работа

Задача 4.6. Обележјето X има $\mathcal{U}(\theta, 2\theta)$ распределба, каде θ е непознат параметар. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Покажи дека $T_n = \frac{n+1}{5n+4}(X_{(1)} + 2X_{(n)})$ е непристрасен оценувач за параметарот θ, каде $X_{(1)} = \min\{X_1, ..., X_n\}$ и $X_{(n)} = \max\{X_1, ..., X_n\}$.

Задача 4.7. Нека $X_1, ..., X_n$ се независни случајни променливи со $E(X_i) = \beta t_i$ и $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, ..., n$, каде $t_1, t_2, ..., t_n$ се познати константи, а β и σ^2 се непознати параметри. Покажи дека $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n t_i X_i \big/ \sum_{i=1}^n t_i^2$ е непристрасен оценувач за β. Определи доволен услов за да $\hat{\beta}$ е конзистентен оценувач за β.

Задача 4.8. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X, при што $EX = a$ и $DX < +\infty$, каде a е непознат параметар. Покажи дека $\hat{a} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^n kX_k$ е конзистентен оценувач за параметарот a.

Задача 4.9. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X, за кое $EX^{2k} < +\infty$. Покажи дека $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^k$ е конзистентен оценувач за $\mu_k = E(X - EX)^k$.