4.2 Најефикасни оценувачи и доволни статистики

Задача 4.10. Нека обележјето X има Поасонова распределба со закон на распределба
$$P(x,\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}\,e^{-\lambda},\ x=0,1,2,...,$$
каде $\lambda>0$ е непознат параметар и нека $(X_1,..,X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X.

а) Покажи дека $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ е непристрасен оценувач за параметарот λ и одреди ја неговата диспезија.

б) Покажи дека $\overline{X}_n$ е регуларен оценувач за λ.

в) Испитај ја ефикасноста на $\overline{X}_n$ како оценувач за λ.

Решение. а) Од $EX=\lambda$ и $DX=\lambda$ следи дека и за случајните променливи од примерокот важи $EX_i=\lambda$ и $DX_i=\lambda,\ i=1,...,n$. Тогаш,
$$E(\overline{X}_n)=E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\Big)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\lambda=\frac{1}{n}\cdot n\lambda=\lambda,$$
односно $\overline{X}_n$ е непристрасен оценувач за параметарот λ. За неговата дисперзија имаме
$$D(\overline{X}_n)=D\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\Big)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\lambda=\frac{1}{n^2}\cdot n\lambda=\frac{\lambda}{n},$$
заради независноста на случајните променливи во примерокот.

б) Треба да ги провериме условите за регуларност за оценувачот $\overline{X}_n$ како оценувач за λ. Функцијата на подобност е
$$L(x,\lambda)=\prod_{i=1}^n P(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^n\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\,e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\,e^{-n\lambda},\ x=(x_1,...,x_n)\in\{0,1,2,...\}^n.$$

(i) Множеството $A=\{x|L(x,\lambda)>0\}=\mathbb{R}^n$ не зависи од λ.

(ii) Првиот извод на $L(x,\lambda)$ по λ е
$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i-1}-n\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\,e^{-n\lambda}.$$

(iii) Ќе покажеме дека може да се диференцира по λ под знакот за сумата $\sum_{x\in\mathbb{R}^n}L(x,\lambda)$, односно дека $\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\sum_{x\in\mathbb{R}^n}L(x,\lambda)\Big)=\sum_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial\lambda}$.

Бидејќи $\sum_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda) = 1$ имаме дека

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\sum_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda)\Big) = 0.$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial\lambda} &= \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i - 1} - n\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\, e^{-n\lambda} = \\
&= \frac{n}{\lambda} \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\, e^{-n\lambda} - n \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\, e^{-n\lambda} = \\
&= \frac{n}{\lambda} \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big)\, L(x,\lambda) - n \sum_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda) = \\
&= \frac{n}{\lambda}\, E(\overline{X}_n) - n\cdot 1 = \frac{n}{\lambda}\cdot\lambda - n = 0,
\end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека важи $\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\sum_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda)\Big) = \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial\lambda}$.

(iv) Ќе покажеме дека може да се диференцира по λ под знакот за сумата $\sum_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\lambda)$, односно дека $\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\sum_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\lambda)\Big) = \sum_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial\lambda}$, каде $U(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

Бидејќи $\sum_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\lambda) = E(U) = E(\overline{X}_n) = \lambda$ имаме дека

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\sum_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\lambda)\Big) = 1.$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial\lambda} &= \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big) \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i - 1} - n\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\, e^{-n\lambda} = \\
&= \frac{n}{\lambda} \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 L(x,\lambda) - n \sum_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big) L(x,\lambda) = \\
&= \frac{n}{\lambda}\, E((\overline{X}_n)^2) - n\, E(\overline{X}_n) = \frac{n}{\lambda}\cdot\Big(\frac{\lambda}{n} + \lambda^2\Big) - n\lambda = 1,
\end{aligned}$$

затоа што $E(\overline{X}_n)^2 = D(\overline{X}_n) + (E(\overline{X}_n))^2 = \frac{\lambda}{n} + \lambda^2$. Заклучуваме дека важи $\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\sum_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\lambda)\Big) = \sum_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial\lambda}$, каде $U(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

Ирена Стојковска

(v) Функцијата $f : \Theta \to \mathbb{R}$ (од Дефиниција 4.10) е $f(\lambda) = \lambda$.

Од (i)-(v) следи дека $\overline{X}_n$ е регуларен оценувач за λ.

в) Ја пресметуваме долната граница D_0 од Теоремата на Рао-Крамер (Теорема 4.3). За неа ни треба

$$\ln L(x,\lambda) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\ln\lambda - \ln\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i!\Big) - n\lambda,$$

од каде

$$\frac{\partial \ln L(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\,\frac{1}{\lambda} - n,$$

па затоа

$$\begin{aligned}
E\Big(\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\lambda)}{\partial\lambda}\Big)^2 &= E\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)\,\frac{1}{\lambda} - n\Big)^2 = E\Big(\frac{1}{\lambda^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2 - \frac{2n}{\lambda}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) + n^2\Big) = \\
&= n^2\, E\Big(\frac{1}{\lambda^2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2 - \frac{2}{\lambda}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) + 1\Big) = \\
&= n^2\, E\Big(\frac{1}{\lambda^2}\big(\overline{X}_n\big)^2 - \frac{2}{\lambda}\big(\overline{X}_n\big) + 1\Big) = \\
&= n^2\,\Big(\frac{1}{\lambda^2}E\big(\overline{X}_n\big)^2 - \frac{2}{\lambda}E\big(\overline{X}_n\big) + 1\Big) = \\
&= n^2\,\Big(\frac{1}{\lambda^2}\big(\frac{\lambda}{n} + \lambda^2\big) - \frac{2}{\lambda}\cdot\lambda + 1\Big) = \frac{n}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Бидејќи $f'(\lambda) = 1$, за D_0 имаме

$$D_0 = \frac{(f'(\lambda))^2}{E\Big(\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\lambda)}{\partial\lambda}\Big)^2} = \frac{1}{\frac{n}{\lambda}} = \frac{\lambda}{n} = D(\overline{X}_n),$$

од каде следи дека $\overline{X}_n$ е најефикасен оценувач за λ.

Забелешка. Изразот $E\Big(\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\lambda)}{\partial\lambda}\Big)^2$ може да се пресмета и со помош на информацијата на Фишер $I(\lambda)$, користејќи ја распределбата на обележјето X т.е. $P(x,\lambda)$. Така, имаме

$$\begin{aligned}
E\Big(\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\lambda)}{\partial\lambda}\Big)^2 &= n\,I(\lambda) = n\,E\Big(\frac{\partial \ln P(X,\lambda)}{\partial\lambda}\Big)^2 = n\,E\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(X\ln\lambda - \ln X! - \lambda\Big)\Big)^2 = \\
&= n\,E\Big(\frac{X}{\lambda} - 1\Big)^2 = n\,E\Big(\frac{X^2}{\lambda^2} - 2\frac{X}{\lambda} + 1\Big) = \frac{n}{\lambda^2}E(X^2) - \frac{2n}{\lambda}EX + n = \\
&= \frac{n}{\lambda^2}(\lambda + \lambda^2) - \frac{2n}{\lambda}\,\lambda + n = \frac{n}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Ирена Стојковска

Задача 4.11. Нека обележјето X има експоненцијална распределба со густина на распределба
$$p(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\,e^{-\frac{x}{\theta}},\ x>0,$$
каде $\theta>0$ е непознат параметар и нека $(X_1,..,X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Покажи дека $\hat{\theta}=n\cdot\min\{X_1,...,X_n\}$ е непристрасен оценувач за θ. Испитај ја ефикасноста на $\hat{\theta}$ како оценувач за θ.

Решение. Нека $(X_1,...,X_n)$ е примерок кој одговаа на обележејето X кое има експоненцијална распределба со функција на распределба

$$F(x,\theta)=\int_{-\infty}^{x}p(u,\theta)\,du=\int_{0}^{x}\frac{1}{\theta}\,e^{-\frac{u}{\theta}}\,du=1-e^{-\frac{x}{\theta}},\ x>0.$$

Тогаш, за распределбата на оценувачот $\hat{\theta}$ имаме

$$\begin{aligned}F_{\hat{\theta}}(x) &= P\{\hat{\theta}\le x\}=P\{n\cdot\min\{X_1,...,X_n\}\le x\}=P\{\min\{X_1,...,X_n\}\le\frac{x}{n}\}=\\ &= 1-P\{\min\{X_1,...,X_n\}>\frac{x}{n}\}=1-P\{X_1>\frac{x}{n},...,X_n>\frac{x}{n}\}=\\ &= 1-P\{X_1>\frac{x}{n}\}\cdot...\cdot P\{X_n>\frac{x}{n}\}=1-(1-P\{X_1\le\frac{x}{n}\})\cdot...\cdot(1-P\{X_n\le\frac{x}{n}\})=\\ &= 1-(1-F(\frac{x}{n},\theta))^n=1-(e^{-\frac{x}{n\theta}})^n=1-e^{-\frac{x}{\theta}},\ x>0,\end{aligned}$$

односно и $\hat{\theta}$ има експоненцијална распределба со параметар θ, од каде $E(\hat{\theta})=\theta$ и $D(\hat{\theta})=\theta^2$, па $\hat{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ.

Ќе покажеме дека за $\hat{\theta}$ важат условите за регуларност. Функцијата на подобност е

$$L(x,\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\,e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}\,e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i},\ x=(x_1,...,x_n)\in R_+^n.$$

(i) Множеството $A=\{x|L(x,\theta)>0\}=\mathbb{R}^n$ не зависи од θ.

(ii) Првиот извод на $L(x,\theta)$ по θ е
$$\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta}{\theta^{n+2}}\,e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}.$$

(iii) Ќе покажеме дека може да се диференцира по θ под знакот за интеграл $\int_{x\in\mathbb{R}^n}L(x,\theta)\,dx$, односно дека $\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n}L(x,\theta)\,dx\Big)=\int_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}\,dx$.

Бидејќи $\int_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\theta)\,dx = 1$ имаме дека

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\lambda)\,dx\Big) = 0.$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned}
\int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}\,dx &= \int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n\theta}{\theta^{n+2}}\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}\,dx = \\
&= \frac{n}{\theta^2}\int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^n}\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i} - \frac{n}{\theta}\int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{\theta^n}\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i} = \\
&= \frac{n}{\theta^2}\int_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big)\, L(x,\theta) - \frac{n}{\theta}\int_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\theta) = \\
&= \frac{n}{\theta^2}\, E(\overline{X}_n) - \frac{n}{\theta}\cdot 1 = \frac{n}{\theta^2}\cdot\theta - \frac{n}{\theta} = 0,
\end{aligned}$$

затоа што $E(\overline{X}_n) = EX = \theta$, каде X е обележјето, па заклучуваме дека важи $\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\theta)\,dx\Big) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}\,dx$.

(iv) Ќе покажеме дека може да се диференцира по θ под знакот за интеграл $\int_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\theta)$, односно дека $\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\theta)\Big) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}$, каде $U(x) = n\cdot\min\{x_1,...,x_n\}$.

Бидејќи $\int_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\theta) = E(U) = E(\hat\theta) = \theta$ имаме дека

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\theta)\Big) = 1.$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned}
\int_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta} &= \int_{x\in\mathbb{R}^n} \big(n\cdot\min\{x_1,...,x_n\}\big)\frac{\sum_{i=1}^n x_i - n\theta}{\theta^{n+2}}\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i} = \\
&= \frac{n}{\theta^2}\int_{x\in\mathbb{R}^n} \big(n\cdot\min\{x_1,...,x_n\}\big)\,\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big)\, L(x,\theta) - \\
&\quad -\frac{n}{\theta}\int_{x\in\mathbb{R}^n} \big(n\cdot\min\{x_1,...,x_n\}\big)L(x,\theta) = \\
&= \frac{n}{\theta^2}\, E(\hat\theta\,\overline{X}_n) - \frac{n}{\theta}\, E(\hat\theta) = 1,
\end{aligned}$$

при што последното равенство важи за $n = 1$, затоа што тогаш $E(\hat\theta\,\overline{X}_n) = E(X_1^2) = 2\theta^2$ и од непристрасноста на $\hat\theta$ т.е. $E(\hat\theta) = \theta$ се добива равенството. (За останатите вредности на n треба да се провери!). Заклучуваме дека за $n = 1$ важи $\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)L(x,\theta)\Big) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} U(x)\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}$, каде $U(x) = n\cdot\min\{x_1,...,x_n\}$.

Ирена Стојковска

(v) Функцијата $f : \Theta \to \mathbb{R}$ (од Дефиниција 4.10) е $f(\theta) = \theta$.

Од (i)-(v) следи дека за $n = 1$, оценувачот $\hat{\theta}$ е регуларен оценувач за θ.

Следно, ја пресметуваме долната граница D_0 од Теоремата на Рао-Крамер (Теорема 4.3). За неа ни треба

$$\ln L(x, \theta) = -n\ \ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

од каде

$$\frac{\partial \ln L(x, \theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

па затоа

$$\begin{aligned}
E\Big(\frac{\partial \ln L(\mathbf{X}, \theta)}{\partial\theta}\Big)^2 &= E\Big(-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2 = E\Big(\frac{n^2}{\theta^2} - \frac{2n}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{\theta^4}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2\Big) = \\
&= n^2\, E\Big(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{\theta^4}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2\Big) = \\
&= n^2\, E\Big(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\cdot\overline{X}_n + \frac{1}{\theta^4}\big(\overline{X}_n\big)^2\Big) = \\
&= n^2\,\Big(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\cdot E\big(\overline{X}_n\big) + \frac{1}{\theta^4}E\big(\overline{X}_n\big)^2\Big) = \\
&= n^2\,\Big(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\cdot\theta + \frac{1}{\theta^4}\big(\frac{\theta^2}{n} + \theta^2\big)\Big) = \frac{n}{\theta^2}.
\end{aligned}$$

Бидејќи $f'(\theta) = 1$, за D_0 имаме

$$D_0 = \frac{(f'(\theta))^2}{E\Big(\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\theta)}{\partial\theta}\Big)^2} = \frac{1}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{n},$$

од каде за $n = 1$ имаме дека $D_0 = \theta^2 = D(\hat{\theta})$, односно непристрасниот регуларен оценувач $\hat{\theta}$ е најефикасен оценувач за θ.

Задача 4.12. Обележјето X има густина на распределба

$$p(x, \theta) = e^{-(x-\theta)},\ \theta < x < +\infty,$$

каде θ е непознат параметар. Покажи дека $U = \min\{X_1, ..., X_n\}$ е доволна статистика за параметарот θ, каде $(X_1, .., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X.

Решение. Функцијата на распределба на обележјето X е

$$F(x,\theta)=\int_{-\infty}^{x}p(u,\theta)\,du=\int_{\theta}^{x}e^{-(u-\theta)}\,du=1-e^{-(x-\theta)},\ x>\theta.$$

Тогаш, за функцијата на распределба на оценувачот U имаме

$$\begin{aligned}F_U(x) &= P\{U\le x\}=P\{\min\{X_1,...,X_n\}\le x\}=\\ &= 1-P\{\min\{X_1,...,X_n\}>x\}=1-P\{X_1>x,...,X_n>x\}=\\ &= 1-P\{X_1>x\}\cdot...\cdot P\{X_n>x\}=1-(1-P\{X_1\le x\})\cdot...\cdot(1-P\{X_n\le x\})=\\ &= 1-(1-F(x,\theta))^n=1-(e^{-(x-\theta)})^n=1-e^{-n(x-\theta)},\ x>\theta,\end{aligned}$$

од каде густината на распределба на U е

$$p_U(x,\theta)=F'_U(x,\theta)=ne^{-n(x-\theta)},\ x>\theta.$$

Следно, ја изведуваме условната распределба на примерокот $(X_1,..,X_n)$ при услов $U=t$. Нека $(x_1,...,x_n)$ е произволен елемент од доменот $x_i>\theta, i=1,...,n$, и $t>\theta$. Тогаш,

$$L(x,\theta|U=t)=\frac{L(x,\theta)}{p_U(t)}=\frac{\prod_{i=1}^n p(x_i,\theta)}{p_U(t)}=\frac{\prod_{i=1}^n e^{-(x_i-\theta)}}{ne^{-n(t-\theta)}}=\frac{e^{-\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)}}{ne^{-n(t-\theta)}}=\frac{e^{-\sum_{i=1}^n x_i}}{ne^{-nt}},$$

што не зависи од оценуваниот праметар θ. Кога $t\le\theta$, условната распределба е 0, па тривијално не зависи од θ. Според тоа, заклучуваме дека оценувачот $U=\min\{X_1,...,X_n\}$ е доволна статистика за параметарот θ.

Задача 4.13. Обележјето X има Поасонова $\mathcal{P}(\lambda)$ распределба, каде $\lambda>0$ е непознат параметар. Врз основа на примерок $(X_1,..,X_n)$ кој одговара на обележјето X, определи една доволна статистика за параметарот λ.

Решение. Распределбата на обележјето X е

$$P(x,\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}\,e^{-\lambda},\ x=0,1,2,...,$$

од каде за функцијата на подобност т.е. распределбата на примерокот $(X_1,...,X_n)$ имаме

$$\begin{aligned}L(x,\lambda) &= \prod_{i=1}^n P(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^n\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\,e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\,e^{-n\lambda}=\\ &= e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}=g(U(x),\theta)\cdot h(x),\end{aligned}$$

за $x=(x_1,...,x_n)\in\{0,1,2,...\}^n$, каде $U(x)=\sum_{i=1}^n x_i$, $g(U(x),\theta)=e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}$ и $h(x)=\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$. Според теоремата за факторизација следи дека $U=\sum_{i=1}^n X_i$ е доволна статистика за λ.

Задача 4.14. Обележјето X има Гаусова $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$ распределба, каде a и $\sigma^2>0$ се непознати параметри. Нека $(X_1,..,X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Покажи дека $(\overline{X}_n,\overline{S}_n^2)$ е доволна статистика за (a,σ^2), каде $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ и $\overline{S}_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X}_n)^2$ се средината и дисперзијата на примерокот соодветно.

Решение. Густината на распределба на обележјето X е

$$p(x,a,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbb{R},$$

од каде за распределбата на примерокот $(X_1,...,X_n)$ имаме

$$\begin{aligned}
L(x,a,\sigma^2) &= \prod_{i=1}^n p(x_i,a,\sigma^2)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}=\\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\,e^{-\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x}+\overline{x}-a)^2}=\\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\,\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2+2(\overline{x}-a)\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})+n(\overline{x}-a)^2\Big)\}=\\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\,\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\overline{s}^2+n(\overline{x}-a)^2)\}=g(\overline{x},\overline{s}^2,a,\sigma^2)\cdot h(x),
\end{aligned}$$

за $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, каде $g(\overline{x},\overline{s}^2,a,\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\ \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\overline{s}^2+n(\overline{x}-a)^2)\}$ и $h(x)=1$, па според теоремата за факторизација следи дека $(\overline{X}_n,\overline{S}_n^2)$ е доволна статистика за (a,σ^2).

Задачи за самостојна работа

Задача 4.15. Нека обележјето X има биномна $\mathcal{B}(m,p)$ распределба, каде m е познат параметар, а $0<p<1$ е непознат параметат и нека $(X_1,..,X_n)$ е примерок кој одгвара на обележјето X. Покажи дека $U_n=\frac{1}{m}\,\overline{X}_n=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^n X_i$ е најефикасен оценувач за параметарот p.

Задача 4.16. Нека обележјето X има рамномерна $\mathcal{U}(\theta_1,\theta_2)$ распределба, каде $\theta_1<\theta_2$ се непознати параметри и нека $(X_1,..,X_n)$ е примерок кој одгвара на обележјето X.

а) Покажи дека $U_n=\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$ е најефикасен оценувач за медијаната $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$.

б) Покажи дека $V_n=\frac{n+1}{n-1}(X_{(n)}-X_{(1)})$ е најефикасен оценувач за опсегот $\theta_2-\theta_1$.

Ирена Стојковска

Задача 4.17. Нека обележјето X има Гама распределба со параметри p и $\frac{1}{\theta}$ т.е има густина на распределба

$$p(x,\theta) = \frac{\theta^p x^{p-1}}{\Gamma(p)}\, e^{-\theta x},\ x > 0,$$

каде $\theta > 0$ е непознат параметар и нека $(X_1, .., X_n)$ е примерок кој одгвара на обележјето X. Нека $\hat{\theta} = \frac{p}{\overline{X}_n}$ е оценувач за θ, каде $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n$ е средината на примерокот. Провери дали $\hat{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ, ако не е, корегирај го до непристрасност. Испитај ја ефикасноста на корегираниот оценувач како оценувач за θ.
Упатство. Оценувачот $\hat{\theta}_1 = \frac{np-1}{np}\hat{\theta}$ е корекцијата до непристрасност и тој е асимптотски најефикасен оценувач за θ.

Задача 4.18. Обележјето X има Гаусова $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ распределба, каде $\sigma^2 > 0$ е непознат параметар. Врз основа на примерок $(X_1, .., X_n)$ кој одговара на обележјето X, определи една доволна статистика за параметарот σ^2.

Задача 4.19. Обележјето X има густина на распределба

$$p(x,\theta) = \theta x^{(\theta-1)},\ 0 < x < 1,$$

каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Покажи дека $U = X_1 \cdot ... \cdot X_n$ е доволна статистика за параметарот θ, каде $(X_1, .., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X.

Задача 4.20. Нека обележјето X прима вредности $x_1, ..., x_k$ со веројатности $p_1, .., p_k$ соодветно, при што $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ и нека $(X_1, .., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Нека U_{nj} е број на членови од примерокот $(X_1, .., X_n)$ кои примаат вредност x_j. Покажи дека $(U_{n1}, ..., U_{nk})$ е доволна статистика за $(p_1, ..., p_k)$.