Теорема 4.5. *Нека T е доволна статистика за параметарот θ и U е непристрасен оценувач за θ. Тогаш, условното математичко очекување $Q(T) = E(U|T)$ е непристрасен оценувач за θ и за секој $\theta \in \Theta$ важи $D(Q(T)) \leq D(U)$. Равенство важи ако и само ако $P\{U = Q(T)\} = 1$.*

Доказ. Од тоа што T е доволна статистика за θ следи дека условната распределба на U при услов $T = t$ не зависи од θ, а со тоа и $E(U|T) = Q(T)$ не зависи од θ и може да се смета за оценувач за θ. Од непристрасноста на U, имаме

$$E(Q(T)) = E(E(U|T)) = E(U) = \theta,$$

од каде следи дека $Q(T)$ е непристрасен оценувач за θ. Понатаму,

$$D(Q(T)) = D(E(U|T) \leq D(U),$$

а равенство се достигнува акоми само ако $Q(T)$ и U се оценувачи со минимална дисперзија, што според Теорема 4.1 е еквивалентно со $P\{U = Q(T)\} = 1$, што требаше да се докаже. ∎

4.3 Методи за наоѓање на оценки

4.3.1 Метод на моменти

Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е случаен примерок кој одговара на обележјето X со функција на распределба F која зависи од непознатите праметри $\theta_1, ..., \theta_r$. Се прашуваме дали може принципот на замена да се примени при оценување на непознатите параметри $\theta_1, ..., \theta_r$ во еден параметарски модел.

Еден пристап (за кој зборевме претходно) е ако може да се изразат $\theta_1, ..., \theta_r$ како функционали од F, а потоа со замена на оценувач $\widehat{F}$ на местото од F се добиваат оценувачи $\widehat{\theta}_1, ..., \widehat{\theta}_r$ за $\theta_1, ..., \theta_r$ соодветно.

Обопштување на овој пристап е да при оценување на $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$ успееме да најдеме r функционални параметри од F, $\eta_1(F), ..., \eta_r(F)$ кои зависат од θ, односно

$$\eta_k(F) = g_k(\theta), \ k = 1, ..., r, \tag{4.22}$$

каде $g_1, ..., g_r$ се познати функции. На овој начин се добива систем од r равенки со r непознати $\theta_1, ..., \theta_r$. Користејќи го примципот на замена, може да ги оцениме $\eta_1(F), ..., \eta_r(F)$ со $\eta_1(\widehat{F}), ..., \eta_r(\widehat{F})$ соодветно. Ако за секои $\eta_1(F), ..., \eta_r(F)$ постои единствено решение на системот (4.22), тогаш оценувачот $\widehat{\theta}$ на θ го дефинираме така да го задоволува системот

$$\eta_k(\widehat{F}) = g_k(\widehat{\theta}), \ k = 1, ..., r. \tag{4.23}$$

Еден избор за $\eta_k(F)$, $k = 1, ..., r$ е k-тиот момент на обележјето X, односно $\eta_k(F) = E(X^k)$, $k = 1, ..., r$. Тогаш, според принципот на замена оценувачи за $\eta_k(F)$, $k = 1, ..., r$ се k-тите моменти на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$, односно $\eta_k(\widehat{F}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = Z_{n,k}$, $k = 1, ..., r$ соодветно. Затоа, овој метод за наоѓање на оценувач е познат како **метод на моменти**. При тоа значи, оценувачот $\widehat{\theta}$ на θ најден со методот на моменти го задоволува системот

$$Z_{n,k} = g_k(\widehat{\theta}),\ k = 1, ..., r. \tag{4.24}$$

Пример 4.14. Нека обележјето X има $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, каде m и σ^2 се непознати параметри. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на ова обележје. Тогаш, за наоѓање на оценувачи на параметрите m и σ^2 со метод на моменти, прво го составуваме следниот систем равенки по m и σ^2.

$$\begin{cases} E(X) = m \\ E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = \sigma^2 + m^2 \end{cases}$$

Потоа, според принсипот на замена, $E(X)$ и $E(X^2)$ ги заменуваме со нивните оценувачи $Z_{n,1}$ и $Z_{n,2}$ соодветно, додека непознатите параметри m и σ^2 ги заменуваме со нивните оценувачи $\widehat{m}$ и $\widehat{\sigma^2}$ соодветно. Така го добиваме следниот систем.

$$\begin{cases} Z_{n,1} = \widehat{m} \\ Z_{n,2} = \widehat{\sigma^2} + \widehat{m}^2 \end{cases}$$

Решавајќи го последниот систем по $\widehat{m}$ и $\widehat{\sigma^2}$ ги добиваме оценувачите за m и σ^2 со метод на моменти. Тоа се,

$$\begin{cases} \widehat{m} = Z_{n,1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n \\ \widehat{\sigma^2} = Z_{n,2} - \widehat{m}^2 = Z_{n,2} - Z_{n,1}^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2 = \overline{S}_n^2 \end{cases}$$

Со методот на моменти се добиваат конзистентни оценувачи за оценуваните параметри.

Теорема 4.6. *Нека обележјето X има функција на распределба F која зависи од r непознати параметри $\theta_1, ..., \theta_r$, нека X има конечни моменти $m_k = E(X^k)$, $k = 1, ..., r$ и нека параметрите $\theta_1, ..., \theta_r$ може да се запишат како непрекинати функции од моментите $m_1, ..., m_r$, $\theta_k = \theta_k(m_1, ..., m_r)$, $k = 1, ..., r$. Тогаш, оценувачите $\widehat{\theta}_k = \theta_k(Z_{n,1}, ..., Z_{n,r})$, $k = 1, ..., r$ добиени со методот на моменти се конзистентни оценувачи за параметрите θ_k, $k = 1, ..., r$ соодветно.*

Доказ. Од Законот на големите броеви имаме дека $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Z_{n,k} - m_k| < \varepsilon\} = 1,\ k = 1, 2, ..., r.$$

Од непрекинатоста на $\theta_k = \theta_k(m_1, ..., m_r),\ k = 1, ..., r$, имаме дека $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0$,

$$\Big(|x_1 - m_1| < \delta, ..., |x_r - m_r| < \delta\Big) \Longrightarrow |\theta_k(x_1, ..., x_r) - \theta_k(m_1, .., m_r)| < \varepsilon,\ k = 1, ..., r.$$

Ако ставиме $x_k = Z_{n,k},\ k = 1, ..., r$ добиваме дека

$$\bigcap_{k=1}^{r}\{|Z_{n,k} - m_k| < \delta\} \subseteq \{|\widehat{\theta}_k - \theta_k| < \varepsilon\},$$

односно

$$\{|\widehat{\theta}_k - \theta_k| \geq \varepsilon\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{r}\{|Z_{n,k} - m_k| \geq \delta\},$$

од каде

$$P\{|\widehat{\theta}_k - \theta_k| \geq \varepsilon\} \leq P\Big(\bigcup_{k=1}^{r}\{|Z_{n,k} - m_k| \geq \delta\}\Big) \leq \sum_{k=1}^{r} P\{|Z_{n,k} - m_k| \geq \delta\} \to 0,$$

па следи дека $\widehat{\theta}_k$ е конзистентен оценувач за $\theta_k,\ k = 1, ..., r$. ■

4.3.2 Метод на максимална подобност

Како што видовме, со принципот на замена се наоѓаат задоволително добри оценувачи за непознатите параметри. Квалитетот на најдените оценувачи со принципот на замена може многу да варира во зависност од изборот на оценувачот за функцијаата на распределба F или изборот на функционалните параметри од F. Исто така принципот на замена тешко може да се примени кај нееднакво распределени случајни променливи од примерокот. Овие проблеми се на некој начин надминати со методот на максимална подобност кој многу често наоѓа не само задоволително добри оценувачи, туку и оценувачи со оптимални својства. Оценувачот најден со методот на максимална подобност се дефинира така да ја максимизита вредноста на одредена функција наречена функција на подобност. Всушност, овој метод се базира на еден важен принцип во статистиката, принципот на подобност, кој вели дека функцијата на подобност ги содржи во себе сите информации за непознатиот параметар, предмет на оценување.

Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X со распределба на веројатност $p(x, \theta)$ која припаѓа на фамилијата од допустливи распределби на веројатност $\mathcal{P} = \{p(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$, каде θ е непознат параметар.

Тогаш, функцијата на распределба на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$ се нарекува **функција на подобност**, се означува со $L(x, \theta)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Во случај на прост случаен примерок, имаме

$$L(x, \theta) = p(x_1, \theta)p(x_2, \theta)...p(x_n, \theta),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ \theta \in \Theta. \tag{4.25}$$

Често, за дадена реализација $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$, функцијата на подобност се третира како функција од параметарот θ т.е.

$$\mathcal{L}(\theta) = L(x, \theta),\ \theta \in \Theta. \tag{4.26}$$

На овој начин функцијата на подбност може да се "прочита" како веројатноста дека случајниот вектор $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ќе ја прими вредноста $(x_1, x_2, ..., x_n)$. При тоа, за различни вредности на $\theta \in \Theta$ се добиваат различни веројатности. Па, може да се каже дека функцијата на подобност мери колку е параметарот θ погоден за добивање на конкретната реализација $(x_1, x_2, ..., x_n)$ на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Според **методот на максимална подобност** (maximum likelihood - ML), за **максимално подобен оценувач** (maximum likelihood estimator - MLE) $\widehat{\theta}$ на параметарот θ се зема статистиката $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ за која важи

$$L(X_1, X_2, ..., X_n, \widehat{\theta}) = \max_{\theta} L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta). \tag{4.27}$$

Постојат главно два начина за барање на ML оценувачите (решавање на задачата (4.27)). Едниот е со директна максимизација на функцијата на подобност $L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ за дадена реализација $(x_1, x_2, ..., x_n)$ на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$, и овој начин е корисен кога доменот на податоците зависи од непознатиот параметар.

Вториот начин се применува кога доменот на податоците не зависи од непознатиот параметар и функцијата на подобност е диференцијабилна по θ на множеството Θ, и тогаш ML оценувачот се наоѓа како решение на **равенката на подобност**

$$\frac{\partial \ln L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)}{\partial \theta} = 0. \tag{4.28}$$

Потврда за овој начин ни дава фактот дека $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е растечка функција, па затоа функциите $L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ и $\ln L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)$ имаат исти точки на максимум. Равенката на подобност може да има повеќе решенија, па во тој случај треба да се провери кое од нив навистина ја максимизира функцијата на подобност. Исто така, ако просторот од параметри Θ не е отворено множество по решавањето на равенката на подобност ќе треба да се проверат и граничните услови, односно дали може максимумот да се достигне на границата од просторот на параметри.

Пример 4.15. Нека обележјето X има $\mathcal{U}(0,\theta)$ распределба, каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Тогаш, функцијата на подобност е

$$L(x,\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n I\{0 \le x_1, ..., x_n \le \theta\} = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n I\{\max\{x_1, ..., x_n\} \le \theta\},$$

за $0 \le x_1, ..., x_n \le \theta$. Кога $\max\{x_1, ..., x_n\} > \theta$, тогаш $L(x,\theta) = 0$. Бидејќи, за $\max\{x_1, ..., x_n\} \le \theta$, $L(x,\theta)$ е опаѓачка функција по θ, заклучуваме дека *ML* оценувач за θ е

$$\widehat{\theta} = \max\{X_1, ..., X_n\} = X_{(n)}.$$

Пример 4.16. Нека обележјето X има $\mathcal{P}(\lambda)$ распределба, каде $\lambda > 0$ е непознат параметар. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Тогаш, функцијата на подобност е

$$L(x,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}\right) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\lambda}.$$

Логоритам од функцијата на подобност е

$$\ln L(x,\lambda) = \ln\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right) - n\lambda.$$

Бараме извод по λ, и добиваме

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln L(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n.$$

Решавајќи ја равенката на подобност $\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln L(X_1, ..., X_n, \lambda) = 0$, добиваме *ML* оценувач $\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n$ за λ. Лесно се проверува дека при $\sum_{i=1}^n x_i > 0$ овој оценувач навистина ја максимизира функцијата на подобност. Имено,

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \ln L(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0.$$

Значи, $\widehat{\lambda} = \overline{X}_n$ е *ML* оценувач за λ, ако $\sum_{i=1}^n X_i > 0$. Ако пак $\sum_{i=1}^n X_i = 0$, тогаш не постои *ML* оценувач за λ, затоа што логоритамот од функцијата на подобност $\ln L(x,\lambda) = -n\lambda$ нема максимум на интервалот $(0, +\infty)$, а и доменот на податоците не зависи од непознатиот параметар, па не може да се примени директна максимизација.

Со методот на максимална подобност не мора да се добие само еден максимално подобен оценувач.

Пример 4.17. Нека обележјето X има $\mathcal{U}(\theta-1,\theta+1)$ распределба, каде $\theta \in \mathbb{R}$ е непознат параметар. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Тогаш, секоја статистика $U = U(X_1, ..., X_n)$ за која важи

$$X_{(n)} - 1 < U < X_{(1)} + 1$$

е максимално подобен оценувач за θ, а такви статистики ги има повеќе. На пример, за секој $t \in (0,1)$, статистиките

$$U_t = X_{(n)} - 1 + t(X_{(1)} - X_{(n)} + 2)$$

се ML оценувачи за θ.

Максимално подобните оценувачи поседуваат одредени убави својства. Конкретно, секој најефикасен оценувач е максимално подобен оценувач.

Својство 4.6. *Нека U е најефикасен оценувач за параметарот θ. Тогаш, U е единствено решение на равенката на подобност.*

Доказ. Според Теоремата на Рао-Крамер (Теорема 4.3), U е најефикасен оценувач за θ ако и само ако важи равенство во неравенството на Рао-Крамер, т.е. ако

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L(x,\theta) = h(\theta)(U - \theta)$$

за некоја функција $h(\theta)$. Тогаш, равенката на подобност

$$\frac{\partial L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)}{\partial\theta} = 0$$

преминува во

$$h(\theta)(U(X_1, ..., X_n) - \theta) = 0$$

чие решение е $\theta = U$. Единственоста следи од единственоста (со веројатност 1) на најефикасен оценувач. ∎

Максимално подобните оценувачи се функција од доволна статистика.

Својство 4.7. *Нека U е доволна статитика за параемтарот θ, тогаш секое решение на равенката на подобност е функција од U.*

Доказ. Нека U е доволна статистика за параметарот θ. Од Теоремата за факторизација (Теорема 4.4), следи

$$L(x,\theta) = g(U(x),\theta) \cdot h(x).$$

Тогаш, равенката на подобност

$$\frac{\partial L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

преминува во

$$\frac{\partial g(U(X_1, X_2, ..., X_n), \theta)}{\partial \theta} = 0,$$

од каде следи дека секое решение (по θ) е функција од U. ■

Меѓутоа, секој ML оценувач не мора да биде доволна статистика.

Пример 4.18. Нека обележјето X има $\mathcal{U}[\theta, \theta+1]$ распределба, каде $\theta \in \mathbb{R}$ е непознат параметар. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Тогаш, функцијата на подобност на примерокот е

$$L(x,\theta) = 1, \text{ за } \theta \leq x_1, ..., x_n \leq \theta + 1,$$

па секоја статистика $U = U(X_1, ..., X_n)$ за која важи

$$X_{(n)} - 1 \leq U \leq X_{(1)}$$

е максимално подобен оценувач за θ. Според тоа и $X_{(1)}$ е ML оценувач за θ, но $X_{(1)}$ не е доволна статитика. Имено, густината на распределба на $X_{(1)}$ е

$$p(t,\theta) = n(\theta + 1 - t)^{n-1}, \ \theta \leq t \leq \theta + 1,$$

па условната распределба на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$ при услов $X_{(1)} = t$ е

$$\frac{L(x,\theta)}{p(t,\theta)} = \frac{1}{n(\theta+1-t)^{n-1}}, \text{ за } \theta \leq x_1, ..., x_n \leq \theta + 1 \text{ и } \theta \leq t \leq \theta + 1$$

зависи од θ.

Друго убаво својство на ML оценувачите е дека тие се инваријантни во однос на трансформациите.

Својство 4.8. *Нека U е максимално подобен оценувач за параметарот θ, и нека f е монотона функција (или поопшто, биекција), тогаш $f(U)$ е максимално подобен оценувач за $f(\theta)$.*

Ирена Стојковска

Доказ. Од f биекција, постои нејзина инверзна функција f^{-1}. Нека $f(\theta) = \theta^*$, тогаш $\theta = f^{-1}(\theta^*)$, па

$$L(x,\theta) = L(x, f^{-1}(\theta^*)) = L^*(x,\theta^*).$$

Тогаш,

$$\max\{L(x,\theta) : \theta \in \Theta\} = \max\{L^*(x,\theta^*) : \theta^* \in \Theta^* = f(\Theta)\},$$

и бидејќи левата страна се максимизира за U, следи дека десната страна се максимизира за $f(U)$. Значи, $f(U)$ е максимално подобен оценувач за $f(\theta)$, што требаше да се докаже. ■

Под дополнителни услови за регуларност може да се покаже конзистентноста и асимптотската нормалност на ML оценувачите. На следните примери се испитани некои од асимптотските својства кај ML оценувачите.

Пример 4.19. Нека обележјето X има $Geo(\theta)$ распределба, каде $0 < \theta < 1$ е непознат параметар, односно распределба на веројатност дадена со

$$P(x,\theta) = \theta(1-\theta)^x, \quad x = 0,1,2,....$$

Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Тогаш, максимално подобниот оценувач за θ е

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}_n + 1}.$$

Да ја испитаме конзистентноста на оценувачот $\widehat{\theta}$ за θ. Имаме за $0 < \varepsilon < \theta$,

$$P\{|\widehat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = P\{\theta - \varepsilon < \widehat{\theta} < \theta + \varepsilon\} = P\{\frac{1}{\theta+\varepsilon} - 1 < \overline{X}_n < \frac{1}{\theta-\varepsilon} - 1\} =$$

$$= P\{-\frac{\varepsilon}{(\theta+\varepsilon)\theta} < \overline{X}_n - \frac{1-\theta}{\theta} < \frac{\varepsilon}{(\theta-\varepsilon)\theta}\} \geq P\{|\overline{X}_n - \frac{1-\theta}{\theta}| < \frac{\varepsilon}{(\theta+\varepsilon)\theta}\} =$$

$$= P\{|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| < \frac{\varepsilon}{(\theta+\varepsilon)\theta}\} \geq 1 - \frac{D(\overline{X}_n)}{(\frac{\varepsilon}{(\theta+\varepsilon)\theta})^2} = 1 - \frac{\frac{1-\theta}{n\theta^2}}{(\frac{\varepsilon}{(\theta+\varepsilon)\theta})^2} \to 1,$$

кога $n \to \infty$. Слично се покажува и во случај кога $\varepsilon \geq \theta$. Заклучуваме дека ML оценувачот $\widehat{\theta}$ е конзистентен оценувач за θ.

Потоа, од Централаната гранична теорема, имаме дека

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \frac{1-\theta}{\theta}) \xrightarrow{dist.} \mathcal{N}(0, \frac{1-\theta}{\theta^2}),$$

од каде добиваме дека

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}-\theta)=\sqrt{n}(g(\overline{X}_n)-g(\frac{1-\theta}{\theta}))\xrightarrow{dist.}\mathcal{N}(0,g'(\frac{1-\theta}{\theta})\frac{1-\theta}{\theta^2})=\mathcal{N}(0,\theta^2(1-\theta)),$$

при што е користен Делта методот за монотоната функција $g(x)=\frac{1}{1+x}$. Значи, ML оценувачот $\widehat{\theta}$ за θ е асимптотски нормален оценувач.

Пример 4.20. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X кое има $\mathcal{U}[0,\theta]$ распределба, каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Максимално подобен оценувач за θ е

$$\widehat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_1,...,X_n\},$$

чија функција на распределба е

$$F_{\widehat{\theta}}(x)=P\{\widehat{\theta}<x\}=\left(\frac{x}{\theta}\right)^n,\ 0\leq x\leq\theta.$$

Тогаш, за произволен $\varepsilon > 0$ имаме,

$$P\{|\widehat{\theta}-\theta|>\varepsilon\}=P\{\widehat{\theta}<\theta-\varepsilon\}=\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n\to 0,\ \text{кога}\ n\to\infty.$$

Значи, $\widehat{\theta}$ е конзистентен оценувач за θ. Од друга страна имаме

$$P\{n(\theta-\widehat{\theta})<x\}=P\{\widehat{\theta}>\theta-\frac{x}{n}\}=1-(1-\frac{x}{\theta n})^n\to 1-e^{-x/\theta},\ \text{за}\ x>0.$$

Значи, $n(\theta-\widehat{\theta})$ конвергира по распределба кон експоненцијална случајна променлива.

4.4 Интервали на доверба

Нека $\mathcal{P}=\{F(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ е фамилијата од допустливи распределби за обележјето X, каде θ е непознат параметар. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Нека $\widehat{\theta}=U(X_1,X_2,...,X_n)$ е оценувач за θ. Најголемиот проблем кај точкастите оценувачи е тоа што веројатноста $P\{\widehat{\theta}=\theta\}$ е многу мала (таа е нула во случај кога $\widehat{\theta}$ има апсолутно непрекината распределба), што доведува до потешкотии при анализа на грешката, односно отстапувањето, при користење на оценувачот $\widehat{\theta}$ за оценување на непознатиот параметар θ.

Алтернативен пристап за оценување на непознатите параметри е интервалното оценување преку интервали на доверба.