4.3 Методи за наоѓање на оценувачи

Задача 4.21. Нека обележјето X има геометриска распределба $Geo(p)$, каде $0 < p < 1$ е непознат параметар. Со метод на моменти, врз основа на примерок $(X_1, ..., X_n)$ кој одговара на обележјето X, најди оценувач за параметарот p.

Решение. Распределбата на обележјето X е

$$P(k, p) = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, ...,$$

па првиот момент на X е

$$E(X) = \frac{1-p}{p}.$$

Сега, според методот на моменти, првиот момент го заменуваме со неговиот оценувач, односно првиот момент на примерокот $Z_{n,1} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, а параметарот p го заменуваме со неговиот оценувач $\hat{p}$. Така, добиваме

$$\overline{X}_n = \frac{1-\hat{p}}{\hat{p}},$$

од каде

$$\hat{p} = \frac{1}{1+\overline{X}_n}$$

е оценувач на параметарот p најден со методот на моменти.

Задача 4.22. Нека обележјето X има рамномерна распределба $\mathcal{U}(\theta_1, \theta_1 + \theta_2)$, каде θ_1 и $\theta_2 > 0$ се непознати параметри. Со метод на моменти, врз основа на примерок $(X_1, ..., X_n)$ кој одговара на обележјето X, најди оценувачи за параметрите θ_1 и θ_2.

Решение. Од $X \sim \mathcal{U}(\theta_1, \theta_1 + \theta_2)$ имаме дека

$$E(X) = \frac{\theta_1 + (\theta_1 + \theta_2)}{2} = \frac{2\theta_1 + \theta_2}{2} \text{ и } D(X) = \frac{(\theta_1 + \theta_2 - \theta_1)^2}{12} = \frac{\theta_2^2}{12},$$

од каде за вториот момент имаме

$$E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = \frac{\theta_2^2}{12} + \left(\frac{2\theta_1 + \theta_2}{2}\right)^2 = \frac{3\theta_1^2 + 3\theta_1\theta_2 + \theta_2^2}{3}.$$

Според методот на моменти, за да ги најдеме оценувачите $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ на θ_1 и θ_2 соодветно, го решаваме следниот систем

$$\begin{cases} Z_{n,1} = \dfrac{2\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}{2} \\ Z_{n,2} = \dfrac{3\hat{\theta}_1^2 + 3\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_2^2}{3} \end{cases},$$

каде $Z_{n,1} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ и $Z_{n,2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ се соодветно првиот и вториот момент на примерокот. Земајќи во предвид дека $\theta_2 > 0$, решенија на последниот систем кои се од наш интерес се

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = Z_{n,1} - \sqrt{3(Z_{n,2} - Z_{n,1}^2)} \\ \hat{\theta}_2 = 2\sqrt{3(Z_{n,2} - Z_{n,1}^2)} \end{cases},$$

односно оценувачи со метод на моменти за θ_1 и θ_2 се

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \overline{X}_n - \sqrt{3\Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2\Big)} = \overline{X}_n - \sqrt{3\overline{S}_n^2} \\ \hat{\theta}_2 = 2\sqrt{3\Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2\Big)} = 2\sqrt{3\overline{S}_n^2} \end{cases}.$$

Задача 4.23. Нека обележјето X има χ_m^2 распределба т.е. неговата густина на распределба е

$$p(x,m) = \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\, e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0,$$

каде m е непознат параметар. Со метод на моменти, врз основа на примерок $(X_1, ..., X_n)$ кој одговара на обележјето X, најди два оценувачи за параметарот m. Испитај ја нивната непристрасност и конзистентност.

Решение. За случајната променлива X со χ_m^2 распределба имаме дека $E(X) = m$ и $D(X) = 2m$, од каде $E(X^2) = DX + (E(X))^2 = 2m + m^2$.

Според методот на моменти, бидејќи $E(X) = m$, следи дека еден оценувач за параметарот m е оценувачот $\hat{m} = Z_{n,1} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Додека пак, од $E(X^2) = 2m + m^2$, вториот оценувач $\tilde{m}$ може да го добиеме од $Z_{n,2} = 2\tilde{m} + \hat{m}^2$, од каде $\tilde{m} = \frac{1}{2}(Z_{n,2} - \hat{m}^2) = \frac{1}{2}\overline{S}_n^2$.

Да ја испитаме непристрасноста на оценувачите $\hat{m}$ и $\tilde{m}$. Од

$$E(\hat{m}) = E(\overline{X}_n) = E\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot m = m,$$

следи дека $\hat{m}$ е непристрасен оценувач за m. Потоа, од

$$\begin{aligned} E(\tilde{m}) &= E\Big(\frac{1}{2}\overline{S}_n^2\Big) = E\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2\Big)\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \frac{1}{n^2}E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\cdot n\cdot(2m+m^2) - \frac{1}{n^2}\cdot(2nm + n^2m^2)\Big) = \frac{(n-1)m}{n} \to m,\ n\to\infty, \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека $\tilde{m}$ е асимптотски непристрасен оценувач за m. Притоа, искористено е дека $X_1, .., X_n$ се независни и еднакво распределени со χ^2_m распределби, од каде следи дека $\sum_{i=1}^n X_i$ има χ^2_{nm} распределба, па затоа $E(\sum_{i=1}^n X_i) = nm$ и $D(\sum_{i=1}^n X_i) = 2nm$, од каде

$$E(\sum_{i=1}^n X_i)^2 = D(\sum_{i=1}^n X_i) + (E(\sum_{i=1}^n X_i))^2 = 2nm + n^2m^2.$$

Оценувачите најдени со метод на моменти се конзистентни. Конзистентноста ќе ја покажеме и со испитување на нивната дисперзија. Имено од

$$D(\hat{m}) = D(\overline{X}_n) = \frac{DX}{n} = \frac{2m}{n} \to 0,\ n \to \infty,$$

и бидејќи $E(\hat{m}) = m$, следи дека $\hat{m}$ е конзистентен оценувач за m. За диспезијата на оценувачот $\tilde{m}$ имаме

$$D(\tilde{m}) = D(\frac{1}{2}\overline{S}^2_n) = \frac{1}{4}D(\overline{S}^2_n) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^3}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\mu_2^2) \to 0,\ n \to \infty,$$

и од $E(\tilde{m}) \to m,\ n \to \infty$, заклучуваме дека $\tilde{m}$ е конзистентен оценувач за m. Притоа, $\mu_2 = E(X - EX)^2$ и $\mu_4 = E(X - EX)^4$ се соодветно вториот и четвртиот централен момент на обележјето X кои не зависат од големината на примерокот n.

Задача 4.24. Нека обележјето X има густина на распределба

$$p(x, \theta) = \theta\, x^{\theta-1},\ 0 < x < 1,$$

каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Со метод на моменти, врз основа на податоците од табелата, кои одговараат на обележјето X, најди оценка за параметарот θ.

x_k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
f_k	5	12	35	28	17	3

Решение. За математичкото очекување на X имаме

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x, \theta)\, dx = \int_0^1 x \cdot \theta\, x^{\theta-1}\, dx = \theta \int_0^1 x^\theta\, dx = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Според методот на моменти, за оценувачот $\hat{\theta}$ важи

$$Z_{n,1} = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+1},$$

од каде
$$\hat{\theta} = \frac{Z_{n,1}}{1 - Z_{n,1}} = \frac{\overline{X}_n}{1 - \overline{X}_n}.$$
Ја пресметуваме аритметичката средина на дадените податоци, за кои $n = 5 + 12 + 35 + 28 + 17 + 3 = 100$,

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(5 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 35 \cdot 0,3 + 28 \cdot 0,4 + 17 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,6) = 0,349,$$

и добиваме дека оценка за параметарот θ е

$$\theta = \frac{\overline{x}}{1 - \overline{x}} = \frac{0,349}{1 - 0,349} \approx 0,536098.$$

Задача 4.25. Обележјето X има густина на распределба

$$p(x, \theta) = e^{\theta - x},\ x \geq \theta,$$

каде θ е непознат параметар. Врз основа на примерокот $(X_1, ..., X_n)$, кој одговара на обележјето X, најди максимално подобен оценувач за θ, а потоа испитај ги непристрасноста и конистентноста на најдениот оценувач.

Решение. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Тогаш, за $x = (x_1, ..., x_n)$, функцијата на подобност е

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{\theta - x_i} = e^{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i},\ x_i \geq \theta, i = 1, ..., n.$$

Бидејќи доменот на функцијата на подобност зависи од оценуваниот параметар, максимално подобниот оценувач го бараме со директна максимизација на функцијата на подобност. Така, од

$$\frac{\partial L(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(e^{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i}\right) = n e^{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i} > 0,\ x_i \geq \theta, i = 1, ..., n,$$

следи дека за $x_i \geq \theta, i = 1, ..., n$, што е еквивалентно со $\min\{x_1, ..., x_n\} \geq \theta$, функцијата $L(x, \theta)$ е растечка по θ, па таа го достигнува својот максимум за најголемата можна вредност за θ, односно за $\theta = \min\{x_1, ..., x_n\}$. Значи, максимално подобен оценувач за θ е $\hat{\theta} = \min\{X_1, ..., X_n\}$.

За функцијата на распределба на $\hat{\theta}$ имаме

$$\begin{aligned} F_{\hat{\theta}}(x) &= P\{\hat{\theta} \leq x\} = P\{\min\{X_1, ..., X_n\} \leq x\} = 1 - P\{\min\{X_1, ..., X_n\} > x\} = \\ &= 1 - P\{X_1 > x, ..., X_n > x\} = 1 - P\{X_1 > x\} \cdot ... \cdot P\{X_n > x\} = \\ &= 1 - (1 - P\{X_1 \leq x\}) \cdot ... \cdot (1 - P\{X_n \leq x\}) = 1 - (1 - F(x))^n, \end{aligned}$$

каде $F(x)$ е функцијата на распределба на облежјето X. Имаме

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u,\theta)\, du = \int_{\theta}^{x} e^{\theta-u}\, du = 1 - e^{\theta-x},\ x \geq \theta,$$

од каде

$$F_{\hat{\theta}}(x) = 1 - (1-F(x))^n = 1 - e^{n(\theta-x)},\ x \geq \theta,$$

па густината на распределба на $\hat{\theta}$ е

$$p_{\hat{\theta}}(x) = F'_{\hat{\theta}}(x) = ne^{n(\theta-x)},\ x \geq \theta.$$

Тогаш, математичкото очекување на $\hat{\theta}$ е

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_{\hat{\theta}}(x)\, dx = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot ne^{n(\theta-x)}\, dx = \\ &= n\Big(-\frac{1}{n}\, x\, e^{n(\theta-x)}\Big|_{\theta}^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_{\theta}^{+\infty} e^{n(\theta-x)}\, dx\Big) = \\ &= n\Big(\frac{\theta}{n} - \frac{1}{n^2} e^{n(\theta-x)}\Big|_{\theta}^{\infty}\Big) = n\Big(\frac{\theta}{n} + \frac{1}{n^2}\Big) = \theta + \frac{1}{n} \to \theta,\ n \to \infty, \end{aligned}$$

односно $\hat{\theta}$ е асимптотски непристрасен оценувач за θ. Да забележиме дека коригираниот оценувач $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \frac{1}{n}$ е непристрасен оценувач за θ.

Да ја испитаме конзистентнста на $\hat{\theta}$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Тогаш,

$$\begin{aligned} P\{|\hat{\theta}-\theta| \geq \varepsilon\} &= 1 - P\{|\hat{\theta}-\theta| < \varepsilon\} = 1 - P\{-\varepsilon < \hat{\theta}-\theta < \varepsilon\} = \\ &= 1 - P\{\theta-\varepsilon < \hat{\theta} < \theta+\varepsilon\} = 1 - \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} p_{\hat{\theta}}(x)\, dx = \\ &= 1 - \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} ne^{n(\theta-x)}\, dx = 1 + n \cdot \frac{1}{n}\, e^{n(\theta-x)}\Big|_{\theta}^{\theta+\varepsilon} = e^{-n\varepsilon} \to 0,\ n \to \infty, \end{aligned}$$

од каде следи дека $\hat{\theta}$ е конзистентен оценувач за θ.

Задача 4.26. Обележјето X има густина на распределба

$$p(x,\theta) = \frac{x}{\theta^2}\, e^{-\frac{x}{\theta}},\ x > 0,$$

каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X.

а) Врз основа на примерокот $(X_1, ..., X_n)$, најди максимално подобен оценувач за θ, а потоа испитај ги непристрасноста и ефикасноста на најдениот оценувач.

б) Покажи дека оценувачот $\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ е непристрасен оценувач за DX.

Ирена Стојковска

Решение. а) Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Тогаш, функцијата на подобност за $x = (x_1, ..., x_n)$ е

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2}\, e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^{2n}}\, e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i},\ x_i > 0, i = 1, ..., n,$$

од каде

$$\ln L(x,\theta) = \ln \prod_{i=1}^{n} x_i - 2n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

За да го најдеме максимално подобниот оценувач за θ ($\theta > 0$), ја решаваме равенката на подобност

$$0 = \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

чие решение е $\theta = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, од каде максимално подобен оценувач за θ е $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{2}\overline{X}_n$, каде $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ е средината на примерокот.

Да ја испитаме непристрассноста на $\hat{\theta}$. Математичкото очекување на X е

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p(x,\theta)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{x}{\theta^2}\,e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \\ &= \frac{1}{\theta^2}\Big(-\theta x^2 e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty} + 2\theta\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\theta}}dx\Big) = \frac{2}{\theta}\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \\ &= \frac{2}{\theta}\Big(-\theta x e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty} + \theta\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}}dx\Big) = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \\ &= -2\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty} = 2\theta, \end{aligned}$$

од каде

$$E(\hat{\theta}) = E\Big(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{2n}\cdot n\cdot 2\theta = \theta,$$

односно $\hat{\theta}$ е непристрасен оценувач за θ.

Оценувачот $\hat{\theta}$ е регуларен оценувач за θ (покажи!).

За да ја испитаме ефикасниста на $\hat{\theta}$, прво ги наоѓаме вториот момент и дисперзијата на X. За вториот момент на X имаме

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot p(x,\theta)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x^2\cdot\frac{x}{\theta^2}\,e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \\ &= \frac{1}{\theta^2}\Big(-\theta x^3 e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty} + 3\theta\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}}dx\Big) = \frac{3}{\theta}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \\ &= 3\theta\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = 3\theta\cdot E(X) = 3\theta\cdot 2\theta = 6\theta^2, \end{aligned}$$

од каде дисперзијата на X е

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 6\theta^2 - (2\theta)^2 = 2\theta^2.$$

Сега, изразот $E\Big(\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\theta)}{\partial\theta}\Big)^2$ го пресметуваме со помош на информацијата на Фишер $I(\theta)$, користејќи ја распределбата на обележјето X т.е. $p(x,\theta)$. Па, имаме

$$\begin{aligned} E\Big(\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\theta)}{\partial\theta}\Big)^2 &= n\,I(\theta) = n\,E\Big(\frac{\partial \ln p(X,\theta)}{\partial\theta}\Big)^2 = n\,E\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\ln X - 2\ln\theta - \frac{X}{\theta}\Big)\Big)^2 = \\ &= n\,E\Big(-\frac{2}{\theta} + \frac{X}{\theta^2}\Big)^2 = \frac{n}{\theta^4}\,E(-2\theta + X)^2 = \frac{n}{\theta^4}\,E(4\theta^2 - 4\theta X + X^2) = \\ &= \frac{n}{\theta^4}\,(4\theta^2 - 4\theta E(X) + E(X^2)) = \frac{n}{\theta^4}\,(4\theta^2 - 4\theta\cdot 2\theta + 6\theta^2) = \frac{2n}{\theta^2}. \end{aligned}$$

Од друга страна, заради независносата на случајните променливи во примерокот, за дисперзијата на оценувачот $\hat\theta$ имаме

$$D(\hat\theta) = D\Big(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{4n^2}\cdot n\cdot 2\theta^2 = \frac{\theta^2}{2n}.$$

Бидејќи $f(\theta) = \theta$, следни дека $f'(\theta) = 1$, па за D_0 од Теоремата на Рао-Крамер имаме

$$D_0 = \frac{(f'(\theta))^2}{E\Big(\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\theta)}{\partial\theta}\Big)^2} = \frac{1}{\frac{2n}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{2n} = D(\hat\theta),$$

од каде заклучуваме дека непристрасниот регуларен оценувач $\hat\theta$ е најефикасен оценувач за θ.

б) Да ја испитаме непристрасноста на оценувачот $U = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ како оценувач за DX. Имаме,

$$E(U) = E\Big(\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\Big) = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{1}{3n}\cdot n\cdot 6\theta^2 = 2\theta^2 = DX,$$

од каде заклучуваме дека U е непристрасен оценувач за DX.

Задача 4.27. Обележјето X има густина на распределба

$$p(x,\theta) = \frac{e^{-|x|}}{2(1 - e^{-\theta})},\ |x| \le \theta,$$

каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Врз основа на примерокот $(X_1, ..., X_n)$, кој одговара на обележјето X, најди максимално подобен оценувач за θ.

Ирена Стојковска

Решение. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. За $x = (x_1, ..., x_n)$, функцијата на подобност е

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-|x_i|}}{2(1-e^{-\theta})} = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i|}}{2^n(1-e^{-\theta})^n},\ |x_i| \leq \theta, i = 1, ..., n.$$

Бидејќи

$$\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i|}}{2^n(1-e^{-\theta})^n}\Big) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i|}}{2^n} \cdot \frac{-ne^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})^{n+1}} < 0,\ |x_i| \leq \theta, i = 1, ..., n,$$

функцијата $L(x,\theta)$ е опаѓачка функција по θ за $|x_i| \leq \theta, i = 1, ..., n$, што е еквивалентно со $\max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \leq \theta$, па таа го достигнува својот максимум за минималната можна вредност за θ, односно за $\theta = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. Значи, максимално подобен оценувач за θ е $\hat{\theta} = \max\{|X_1|, ..., |X_n|\}$.

Задача 4.28. Еден стрелец ја погодува целта со непозната веројатност p ($0 < p < 1$). За да ја оцени веројатноста p, стрелецот зема 20 куршуми со кои ја гаѓа целта и при тоа го забележува бројот на погодоци. Тој изведува 5 серии од такви гаѓања (секоја серија од по 20 куршуми) и притоа ги забележал резултатите дадени во табелата. Врз основа на дадените резултати, најди максимално подобна оценка за параметарот p.

серија	1	2	3	4	5
број на погодоци	14	10	12	9	15

Решение. Нека X е број на погодоци на целта при 20 независни гаѓања. Тогаш, X има $\mathcal{B}(20,p)$ распределба, каде p е непознат параметар, односно законот на распределба на X е

$$P(x,p) = \binom{20}{x} p^x (1-p)^{20-x},\ x = 0, 1, ..., 20.$$

Тогаш, реализацијата на функцијата на подобност за дадените податоци е

$$\begin{aligned} L(x,p) &= \prod_{i=1}^{5} P(x_i,p) = P(14,p) \cdot P(10,p) \cdot P(12,p) \cdot P(9,p) \cdot P(15,p) = \\ &= \binom{20}{14} p^{14}(1-p)^{20-14} \cdot \binom{20}{10} p^{10}(1-p)^{20-10} \cdot \binom{20}{12} p^{12}(1-p)^{20-12} \cdot \\ &\quad \cdot \binom{20}{9} p^{9}(1-p)^{20-9} \cdot \binom{20}{15} p^{15}(1-p)^{20-15} = C \cdot p^{60}(1-p)^{40}, \end{aligned}$$

каде $C = \binom{20}{14}\binom{20}{10}\binom{20}{12}\binom{20}{9}\binom{20}{15}$.

Ирена Стојковска

За да ја одредиме вредноста на параметарот p за кој функвијата $L(x,p)$ достигнува максимум, ја решаваме равенката на подобност

$$0 = \frac{\partial \ln L(x,p)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(\ln C + 60\ln p + 40\ln(1-p)) = \frac{60}{p} - \frac{40}{1-p},$$

чие решение е $p = 0,6$, што прецтавува максимално подобна оценка за параметарот p најдена врз основа на дадените податоци.

Задача 4.29. Нека обележјето X има закон на распределба

$$P(-2,\theta) = \frac{\theta}{5},\ P(0,\theta) = \frac{\theta}{5},\ P(7,\theta) = 1 - \frac{2\theta}{5},$$

каде θ $(0 < \theta < \frac{5}{2})$ е непознат параметар.

а) Врз основа на податоците: 0, -2, 7, -2, кои одговараат на обележјето X, најди максимално подобна оценка за θ.

б) Врз основа на примерок $(X_1,...,X_n)$, кој одговара на обележјето X, најди максимално подобен оценувач за θ.

Решение. а) Реализацијата на функцијата на подобност врз основа на дадените податоци е

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{4} P(x_i,\theta) = P(0,\theta)\cdot P(-2,\theta)\cdot P(7,\theta)\cdot P(-2,\theta) = \Big(\frac{\theta}{5}\Big)^3\Big(1-\frac{2\theta}{5}\Big).$$

За да ја најдеме максимално подобната оценка за θ $(0 < \theta < \frac{5}{2})$ ја решаваме равенката на подобност

$$0 = \frac{\partial L(x,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\theta^3}{5^3} - \frac{2\theta^4}{5^4}\Big) = \frac{\theta^2}{5^3}\Big(3 - \frac{8\theta}{5}\Big),$$

чие решение е $\theta = \frac{15}{8}$, што прецтавува максимално подобна оценка за θ врз основа на дадените податоци.

б) Нека $(X_1,...,X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Нека m_k е број на појавувања на вредноста k, $k = -2, 0, 7$ во реализацијата $(x_1,...,x_n)$ на примерокот $(X_1,...,X_n)$, тогаш $m_{-2} + m_0 + m_7 = n$. Функцијата на подобност е

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i,\theta) = (P(-2,\theta))^{m_{-2}}\cdot(P(0,\theta))^{m_0}\cdot(P(7,\theta))^{m_7} = \Big(\frac{\theta}{5}\Big)^{m_{-2}+m_0}\cdot\Big(1-\frac{2\theta}{5}\Big)^{m_7}.$$

Ја решаваме равенката на подобност

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial L(x,\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\Big(\frac{\theta}{5}\Big)^{m_{-2}+m_0}\cdot\Big(1-\frac{2\theta}{5}\Big)^{m_7}\Big) = \\ &= \frac{1}{5}\Big(\frac{\theta}{5}\Big)^{m_{-2}+m_0-1}\Big(1-\frac{2\theta}{5}\Big)^{m_7-1}\Big((m_{-2}+m_0)\cdot\Big(1-\frac{2\theta}{5}\Big) - \frac{2\theta}{5}\cdot m_7\Big), \end{aligned}$$

од каде следува дека

$$(m_{-2}+m_0)\cdot\left(1-\frac{2\theta}{5}\right)-\frac{2\theta}{5}\cdot m_7=0.$$

Ако искористиме дека $m_{-2}+m_0+m_7=n$, добиваме

$$(n-m_7)\cdot\left(1-\frac{2\theta}{5}\right)-\frac{2\theta}{5}\cdot m_7=0 \implies n\cdot\left(1-\frac{2\theta}{5}\right)-m_7=0,$$

од каде

$$\theta=\frac{5(n-m_7)}{2n}.$$

Значи, $\hat{\theta}=\frac{5(n-M_7)}{2n}$, каде $M_7=\sum_{i=1}^n I\{X_i=7\}$ е максимално подобен оценувач за θ.

Задача 4.30. Обележјето X има густина на распределба

$$p(x,\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2}\,e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}},\ x>\theta_1,$$

каде θ_1 и $\theta_2>0$ се непознати параметри. Со метод на максимална подобност, врз основа на примерок $(X_1,...,X_n)$ кој одговара на обележјето X, најди оценувачи за параметрите θ_1 и θ_2.

Решение. Нека $(X_1,...,X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Функцијата на подобност е

$$L(x,\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^n p(x,\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\theta_2}\,e^{-\frac{x_i-\theta_1}{\theta_2}}=\frac{1}{\theta_2^n}\,e^{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta_1)},\ x_1>\theta_1,...,x_n>\theta_1,$$

од каде

$$\ln L(x,\theta_1,\theta_2)=-n\ln\theta_2-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta_1)=-n\ln\theta_2+\frac{n\theta_1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Бидејќи

$$\frac{\partial\ln L(x,\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}=\frac{n}{\theta_2}>0,$$

за $x_1>\theta_1,...,x_n>\theta_1$, следи дека функцијата $\ln L(x,\theta_1,\theta_2)$ е растечка по θ_1, па го достигнува својот максимум за најголемата можна вредност на θ_1, односно за $\theta_1=\min\{x_1,...,x_n\}$. За истата таа вредност и $L(x,\theta_1,\theta_2)$ достигнува максимум по θ_1, од каде добиваме дека $\hat{\theta_1}=\min\{X_1,...,X_n\}=X_{(1)}$ е максимално подобен оценувач за θ_1.

Равенкита на подобност за $\theta_2>0$ е

$$0=\frac{\partial\ln L(x,\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=-\frac{n}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_2^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta_1),$$

а нејзино решение е $\theta_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_1-\theta_1)=\overline{x}-\theta_1$, од каде максимално подобен оценувач за θ_2 е $\hat{\theta_2}=\overline{X}_n-\hat{\theta_1}=\overline{X}_n-X_{(1)}$.

Задачи за самостојна работа

Задача 4.31. Нека обележјето X има функција на распределба

$$F(x,\delta)=\frac{2\delta x}{\delta^2+x^2},\ 0<x<\delta,$$

каде δ е непознат параметар. Со метод на моменти, врз основа на примерок $(X_1,...,X_n)$ кој одговара на обележјето X, најди оценувач за параметарот δ. Испитај ги непристрасноста и конзистентноста на најдениот оценувач.

Задача 4.32. Обележјето X има "двоен" Пуасонов закон на распределба

$$P(k,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda_1^k}{k!}\,e^{-\lambda_1}+\frac{1}{2}\,\frac{\lambda_2^k}{k!}\,e^{-\lambda_2},\ k=0,1,2,...$$

каде λ_1 и λ_2 $(\lambda_1<\lambda_2)$ се непознати параметри. Со метод на моменти, врз основа на податоците од табелата, кои одговараат на обележјето X, најди оценки за параметрите λ_1 и λ_2.

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_k	13	15	19	16	15	8	6	4	2	1	1

Задача 4.33. Нека обележјето X има закон на распределба

$$P(k,\lambda)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})k!},\ k=1,2,...,$$

каде $\lambda>0$ е непознат параметар. Нека $(X_1,...,X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X и нека $\overline{X}_n$ е средината на примерокот. Покажи дека со метод на моменти не може да се најде оценувач $\hat{\lambda}$ за параметарот λ за кој важи $\hat{\lambda}\geq\overline{X}_n$.

Задача 4.34. Нека обележјето X има густина на распределба

$$p(x,\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2}\,e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}},\ x>\theta_1,$$

каде θ_1 и $\theta_2>0$ се непознати параметри. Со метод на моменти, врз основа на примерок $(X_1,...,X_n)$ кој одговара на обележјето X, најди оценувачи за параметрите θ_1 и θ_2.

Задача 4.35. Обележјето X има рамномерна $\mathcal{U}(\theta,1)$ распределба каде $0<\theta<1$ е непознат параметар. Врз основа на примерокот $(X_1,...,X_n)$, кој одговара на обележјето X, најди максимално подобен оценувач за θ, а потоа испитај ги непристрасноста и конистентноста на најдениот оценувач. Дали најдениот оценувач е доволен оценувач?

Ирена Стојковска

Задача 4.36. Нека X е број на независни испитувања се до појавување на настанот A по прв пат, кој во секое од независните испитувања се појавува со иста веројатнист p $(0 < p < 1)$. Се изведуваат пет серии од независни испитувања и забележан е бројот на испитувања се до појавувањето на настанот A по прв пат: 1, 2, 3, 1, 0, соодветно. Врз основа на овие податоци најди максимално подобна оценка за параметарот p.

Задача 4.37. Нека обележјето X има закон на распределба

$$P\{X = 0,\ p\} = 1 - p,\ P\{X = 1,\ p\} = p,$$

каде p $(0 < p < 1)$ е непознат параметар. Врз основа на примерок $(X_1, ..., X_n)$, кој одговара на обележјето X, најди максимално подобен оценувач за p.

Задача 4.38. Обележјето X има логоритамска нормална распределба со густина на распределба

$$p(x, a, \sigma^2) = \frac{x^{-1}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - a)^2},\ x > 0,$$

каде a и $\sigma^2 > 0$ се непознати параметри. Со метод на максимална подобност, врз основа на примерок $(X_1, ..., X_n)$, кој одговара на обележјето X, најди оценувачи за параметрите a и $\sigma^2 > 0$.

Задача 4.39. Нека обележјето X има густина на распределба која за $0 \leq x \leq 1$ е пропорционална со $x^{\alpha}(1 - x)$, каде $\alpha > -1$ е непознат параметар (за сите други вредности на x, густината на распределба е 0). Врз основа на примерок $(X_1, ..., X_n)$, кој одговара на обележјето X, најди максимално подобен оценувач за параметарот α.

Задача 4.40. Времето T на расипување на една машина има померена експоненцјална распределба со густина на распределба

$$p(t, t_0, \lambda) = \lambda\, e^{-\lambda(t - t_0)}\ t > t_0,$$

каде $\lambda, t_0 > 0$ се параметри. Врз основа на примерок $(T_1, ..., T_n)$, кој одговара на обележјето T, најди максимално подобен оценувач за

а) параметарот λ, под претпоставка дека t_0 е познато,
б) параметарот t_0, под претпоставка дека λ е познато,
в) параметрите λ и t_0, ако и двата параметри се непознати.