од каде добиваме дека

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}-\theta)=\sqrt{n}(g(\overline{X}_n)-g(\frac{1-\theta}{\theta}))\xrightarrow{dist.}\mathcal{N}(0,g'(\frac{1-\theta}{\theta})\frac{1-\theta}{\theta^2})=\mathcal{N}(0,\theta^2(1-\theta)),$$

при што е користен Делта методот за монотоната функција $g(x)=\frac{1}{1+x}$. Значи, ML оценувачот $\widehat{\theta}$ за θ е асимптотски нормален оценувач.

Пример 4.20. Нека $(X_1,X_2,...,X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X кое има $\mathcal{U}[0,\theta]$ распределба, каде $\theta>0$ е непознат параметар. Максимално подобен оценувач за θ е

$$\widehat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_1,...,X_n\},$$

чија функција на распределба е

$$F_{\widehat{\theta}}(x)=P\{\widehat{\theta}<x\}=\left(\frac{x}{\theta}\right)^n,\ 0\leq x\leq\theta.$$

Тогаш, за произволен $\varepsilon>0$ имаме,

$$P\{|\widehat{\theta}-\theta|>\varepsilon\}=P\{\widehat{\theta}<\theta-\varepsilon\}=\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n\to 0,\ \text{кога}\ n\to\infty.$$

Значи, $\widehat{\theta}$ е конзистентен оценувач за θ. Од друга страна имаме

$$P\{n(\theta-\widehat{\theta})<x\}=P\{\widehat{\theta}>\theta-\frac{x}{n}\}=1-(1-\frac{x}{\theta n})^n\to 1-e^{-x/\theta},\ \text{за}\ x>0.$$

Значи, $n(\theta-\widehat{\theta})$ конвергира по распределба кон експоненцијална случајна променлива.

4.4 Интервали на доверба

Нека $\mathcal{P}=\{F(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ е фамилијата од допустливи распределби за обележјето X, каде θ е непознат параметар. Нека $(X_1,X_2,...,X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Нека $\widehat{\theta}=U(X_1,X_2,...,X_n)$ е оценувач за θ. Најголемиот проблем кај точкастите оценувачи е тоа што веројатноста $P\{\widehat{\theta}=\theta\}$ е многу мала (таа е нула во случај кога $\widehat{\theta}$ има апсолутно непрекината распределба), што доведува до потешкотии при анализа на грешката, односно отстапувањето, при користење на оценувачот $\widehat{\theta}$ за оценување на непознатиот параметар θ.

Алтернативен пристап за оценување на непознатите параметри е интервалното оценување преку интервали на доверба.

Дефиниција 4.14. Нека $L(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $U(X_1, X_2, ..., X_n)$ се две статистики така што за секој $\theta \in \Theta$ важи $P\{L(X_1, X_2, ..., X_n) \leq U(X_1, X_2, ..., X_n)\} = 1$ и

$$P\{L(X_1, X_2, ..., X_n) < \theta < U(X_1, X_2, ..., X_n)\} \geq 1 - \alpha, \tag{4.29}$$

каде $0 < \alpha < 1$ е даден број. Тогаш, интервалот $(L(X_1, X_2, ..., X_n), U(X_1, X_2, ..., X_n))$ се нарекува $100(1-\alpha)\%$ **интервал на доверба** за непознатиот параметар θ. Бројот $1-\alpha$ се нарекува **ниво на доверба** или **веројатност на доверба**.

Интервалите на доверба се дефинирани преку распределбата на случајниот примерок $(X_1, X_2, ..., X_n)$, но во пракса, тие се интерпретираат преку набљудуваните вредности на овие случајни променливи оставајќи впечаток дека веројатносното тврдење е во врска со θ, а не со случајниот интервал. Значи, за дадена реализација на примерокот $(x_1, x_2, ..., x_n)$, интервалот $(L(x_1, x_2, ..., x_n), U(x_1, x_2, ..., x_n))$ или ќе ја содржи вистинската вредност на θ или нема да ја содржи вистинската вредност на θ, но при повторување на експериментот голем број пати, $100(1-\alpha)\%$ од добиените интервали ќе ја содржат вистинската вредност на θ.

Некогаш ќе може да се најде интервал $(L(X_1, X_2, ..., X_n), U(X_1, X_2, ..., X_n))$ со особина

$$P\{L(X_1, X_2, ..., X_n) < \theta < U(X_1, X_2, ..., X_n)\} = 1 - \alpha, \tag{4.30}$$

за сите $\theta \in \Theta$, или со особина

$$P\{L(X_1, X_2, ..., X_n) < \theta < U(X_1, X_2, ..., X_n)\} \approx 1 - \alpha, \tag{4.31}$$

за сите $\theta \in \Theta$, кој се нарекува **приближно** $100(1-\alpha)\%$ **интервал на доверба** за θ.

Пример 4.21. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. Тогаш, $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, па затоа

$$P\{-1.96 < \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) < 1.96\} = 0.95,$$

што е еквивалентно со

$$P\{\overline{X}_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\} = 0.95,$$

каде $\overline{X}_n$ е средината на примерокот. Следствено, интервалот со крајни точки $\overline{X}_n \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}$ е 95% интервал на доверба за μ.

Да забележиме дека, ако обележјето X има математичко очекување μ и дисперзија 1 (не е неопходно да е нормално распределено), тогаш од централната гранична теорема имаме,

$$P\{-1.96 < \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) < 1.96\} \approx 0.95,$$

ако n е доволно големо. Според горниот начин на расудување, следи дека интервалот со крајни точки $\overline{X}_n \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}$ е приближно 95% интервал на доверба за μ.

Може да се покаже дека ако обележјето X има математичко очекување μ и непозната дисперзија σ^2, тогаш за n доволно големо (во пракса, за $n > 30$), интервалот

$$(\overline{X}_n - \frac{1.96\, S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{1.96\, S_n}{\sqrt{n}})$$

е приближно 95% интервал на доверба за μ, каде S_n^2 е корегираната дисперзијата на примерокот (тогаш S_n е **корегирана стандардна девијација на примерокот**).

Изборот на статистиките $L(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $U(X_1, X_2, ..., X_n)$ кои ќе бидат лева, односно десна граница на интервалот на доверба не е еднозначно одреден. Една постапка за одредување на овие граници е така наречениот **пивот метод**, со кој најнапред се одбира **централна статитика** $T(X_1, ..., X_n, \theta)$ за параметарот θ така што

(1) распределбата на $T(X_1, ..., X_n, \theta)$ не зависи од оценуваниот параметар θ,

(2) за секој $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ функцијата $T(x_1, ..., x_n, \theta)$ е непрекината и строго монотона функција по θ.

Се покажува дека кога равенката $T(x_1, ..., x_n, \theta) = t$ е решлива за секој $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ и t од множеството вредности на $T(x_1, ..., x_n, \theta)$, тогаш за секој $0 < \alpha < 1$ може да се конструира интервал на довверба за θ со ниво на доверба $1 - \alpha$. Имено, постојат броеви a и b така што

$$1 - \alpha = P\{a < T(X_1, ..., X_n, \theta) < b\},$$

за сите $\theta \in \Theta$. Заради горните услови, последното равенство ќе може да се трансформира во облик

$$1 - \alpha = P\{L(X_1, ..., X_n) < \theta < U(X_1, ..., X_n)\},$$

па интервалот $(L(X_1, ..., X_n), U(X_1, ..., X_n))$ е $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за параметарот θ.

Пример 4.22. Нека обележјето X има $\mathcal{U}[0, \theta]$ распределба, каде $\theta > 0$ е непознат параметар. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Максимално подобен оценувач за θ е подредената статистика $X_{(n)} = \max\{X_1, ..., X_n\}$. Тогаш, функцијата на распределба на статистиката $T = X_{(n)}/\theta$ е

$$F_T(x) = x^n,\ 0 \le x \le 1.$$

Заклучуваме дека статистиката T е централна статистика за θ. За да најдеме $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за θ, треба да најдеме броеви a и b така што

$$P\{a < \frac{X_{(n)}}{\theta} < b\} = 1-\alpha.$$

Очигледно постојат бесконечно многу избори за a и b. Може да се покаже дека за $a = \alpha^{1/n}$ и $b = 1$ се добива најкраткиот можен интервал на доверба. Тој интервал на доверба е

$$(X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}}).$$

Пример 4.23. Нека обележјето $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, каде $\lambda > 0$ е непознат параметар. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Максимално подобен оценувач за λ е $\overline{X}_n$. При тоа, од $EX = DX = \lambda$ имаме дека $E(\overline{X}_n) = \lambda$ и $D(\overline{X}_n) = \lambda/n$.

Во случај на голем примерок, од законот на големите броеви и централната гранична тепрема, имаме дека

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \lambda \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}(\overline{X}_n - \lambda) \xrightarrow{dist.} \mathcal{N}(0,1).$$

Од $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \lambda$ следи дека $\sqrt{\overline{X}_n} \xrightarrow{P} \sqrt{\lambda}$. Имено за $0 < \varepsilon < 2\sqrt{\lambda}$,

$$P\{|\sqrt{\overline{X}_n} - \sqrt{\lambda}| < \varepsilon\} = P\{(-\varepsilon + \sqrt{\lambda})^2 < \overline{X}_n < (\varepsilon + \sqrt{\lambda})^2\} =$$

$$= P\{\varepsilon^2 - 2\varepsilon\sqrt{\lambda} < \overline{X}_n - \lambda < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\lambda}\} \geq P\{|\overline{X}_n - \lambda| < -\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\lambda}\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{\lambda/n}{(-\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\lambda})^2} \longrightarrow 1, \text{ кога } n \to \infty.$$

Слично се покажува и кога $\varepsilon \geq 2\sqrt{\lambda}$. Понатаму, од $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}(\overline{X}_n - \lambda) \xrightarrow{dist.} \mathcal{N}(0, 1^2)$ и $\sqrt{\overline{X}_n} \xrightarrow{P} \sqrt{\lambda}$, користејќи ја теоремата на Slutsky заклучуваме дека

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{X}_n}}(\overline{X}_n - \lambda) \xrightarrow{dist.} \mathcal{N}(0,1).$$

Тогаш, за централна статистика за параметарот λ може да ја земеме статитиката $T = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{X}_n}}(\overline{X}_n - \lambda)$. Сега, бараме броеви a и b така што

$$P\{a < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{X}_n}}(\overline{X}_n - \lambda) < b\} = 1-\alpha. \tag{4.32}$$

Бидејќи статистиката T е асимптотски нормална следи дека

$$P\{a < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{X}_n}}(\overline{X}_n - \lambda) < b\} \approx \Phi_0(b) - \Phi_0(a), \tag{4.33}$$

каде $\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ е Лапласовиот интеграл, па може да најдеме само приближен $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за λ. Понатаму, имаме дека

$$P\{a < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{X}_n}}(\overline{X}_n - \lambda) < b\} = P\{\overline{X}_n - \frac{b\sqrt{\overline{X}_n}}{\sqrt{n}} < \lambda < \overline{X}_n - \frac{a\sqrt{\overline{X}_n}}{\sqrt{n}}\}, \tag{4.34}$$

значи приближниот $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за λ е

$$(\overline{X}_n - \frac{b\sqrt{\overline{X}_n}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n - \frac{a\sqrt{\overline{X}_n}}{\sqrt{n}}). \tag{4.35}$$

Броевите a и b ги определуваме од условот да интервалот на доверба е со минимална должина, односно бараме броеви a и b така да разликата $b-a$ е минимална при услов $\Phi_0(b) - \Phi_0(a) = 1-\alpha$. Од симетријата на стандардната нормална распределба околу нулата заклучуваме дека за $a = -b$ се добива интервал на доверба со минимална должина. Тогаш,

$$1-\alpha = \Phi_0(b) - \Phi_0(a) = \Phi_0(b) - \Phi_0(-b) = 2\Phi_0(b).$$

Значи, $\Phi_0(b) = (1-\alpha)/2$, и тогаш означуваме $b = u_{(1-\alpha)/2}$, $a = -u_{(1-\alpha)/2}$, каде $\Phi_0(u_\alpha) = \alpha$.

4.4.1 Интервал на доверба за веројатност на настан

Нека настанот A се реализира со непозната веројатност $p = P(A)$. За да најдеме интервал на доверба за p, го разгледуваме обележјето $X = I_A$ кое има Бернулиева $0,1$ распределба, односно има $\mathcal{B}(1,p)$ распределба. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X. Тогаш, од централната гранична теорема имаме дека статистиката

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{dist.} \mathcal{N}(0,1),$$

каде $q = 1-p$, има асимптотски стандардна нормална распределба $\mathcal{N}(0,1)$. Па, во случај на голем примерок, за централна статистика за p може да ја земеме статистиката T и нејзината асимптотска распределба да ја користиме при изведувањето на интервалот на доверба за p.

Сега, треба да најдеме броеви a и b така што

$$1-\alpha = P\{a < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\} \approx \Phi_0(b) - \Phi_0(a),$$

каде $\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ е Лапласовиот интеграл. Заради симетричноста на стандардната нормална распределба околу нилата земаме $a=-b$, и од $1-\alpha \approx \Phi_0(b) - \Phi_0(a) = 2\Phi_0(b)$, може приближно да земеме дека $b = u_{(1-\alpha)/2}$ и $a = -u_{(1-\alpha)/2}$, каде $\Phi_0(u_\alpha) = \alpha$.

Откако ги одредивме a и b, обликот на приближниот $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за p го добиваме на следниот начин. Имено,

$$1-\alpha = P\{|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}| < u_{(1-\alpha)/2}\} = P\{\frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i - np)^2}{np(1-p)} < u^2_{(1-\alpha)/2}\} =$$

$$= P\{(n^2 - nu^2_{(1-\alpha)/2})p^2 - (2n\sum_{i=1}^{n} X_i + nu^2_{(1-\alpha)/2})p + (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 < 0\} = P\{\widehat{p}_1 < p < \widehat{p}_2\},$$

каде $\widehat{p}_1$ и $\widehat{p}_2$ се соодвтно помалиот и поголемиот корен на квадратната рнвенка по p

$$(n^2 - nu^2_{(1-\alpha)/2})p^2 - (2n\sum_{i=1}^{n} X_i + nu^2_{(1-\alpha)/2})p + (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 = 0,$$

и бараниот интервал на доверба е $(\widehat{p}_1, \widehat{p}_2)$, односно

$$\Big(\frac{n}{n+u^2_{(1-\alpha)/2}}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} + \frac{u^2_{(1-\alpha)/2}}{2n} - u_{(1-\alpha)/2}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(n - \sum_{i=1}^{n} X_i)}{n^3} + \frac{u^2_{(1-\alpha)/2}}{4n^2}}\Big),$$
$$\frac{n}{n+u^2_{(1-\alpha)/2}}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} + \frac{u^2_{(1-\alpha)/2}}{2n} + u_{(1-\alpha)/2}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(n - \sum_{i=1}^{n} X_i)}{n^3} + \frac{u^2_{(1-\alpha)/2}}{4n^2}}\Big)\Big).$$

Алтернативно, за централна статистика за p може да се земе статистиката

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{n\,\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\,(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})}},$$

која исто така има приближно нормална $\mathcal{N}(0,1)$ распределба. Во тој случај се добива поедноставен облик за $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за параметарот p т.е.

$$\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - u_{(1-\alpha)/2}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n^2}\Big(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\Big)},$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} + u_{(1-\alpha)/2}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n^2}\Big(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\Big)}\Big).$$

Ирена Стојковска

4.4.2 Интервали на доверба за параметрите на нормална распределба

Во случај на мал примерок, претпоставуваме дека обележјето X има нормална распределба $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Тогаш, се користат точните распределби на централните статистики за наоѓање на интервалите на доверба за параметрите m и σ^2.

Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X.

(1) Интервал на доверба за m кога σ^2 е позната

Видовме дека статистиката $\overline{X}_n$ има $\mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$ распределба, од каде заклучуваме дека за централна статистика може да ја земеме статистиката

$$T = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Бараме броеви a и b така што

$$1 - \alpha = P\{a < \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} < b\} = \Phi_0(b) - \Phi_0(a),$$

каде $\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ е Лапласовиот интеграл. Од равенството

$$P\{a < \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} < b\} = P\{\overline{X}_n - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\},$$

заклучуваме дека $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за m е

$$(\overline{X}_n - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

Броевите a и b ги определуваме од условот да интервалот на доверба е со минимална должина, односно бараме броеви a и b така да разликата $b - a$ е минимална при услов $\Phi_0(b) - \Phi_0(a) = 1 - \alpha$. Од симетријата на стандардната нормална распределба околу нулата заклучуваме дека за $a = -b$ се добива интервал на доверба со минимална должина. Тогаш,

$$1 - \alpha = \Phi_0(b) - \Phi_0(a) = \Phi_0(b) - \Phi_0(-b) = 2\Phi_0(b).$$

Значи, $\Phi_0(b) = (1-\alpha)/2$, и тогаш означуваме $b = u_{(1-\alpha)/2}$, $a = -u_{(1-\alpha)/2}$, каде $\Phi_0(u_\alpha) = \alpha$.

(2) Интервал на доверба за m кога σ^2 не е позната

Во овој случај за централна статистика ја земаме статистиката

$$T = \frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1} \sim t_{n-1}.$$

Бараме броеви a и b така што

$$1 - \alpha = P\{a < \frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1} < b\}. \tag{4.36}$$

Од равенството

$$P\{a < \frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1} < b\} = P\{\overline{X}_n - b\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{X}_n - a\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}}\},$$

заклучуваме дека $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за m е

$$(\overline{X}_n - b\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}}, \overline{X}_n - a\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n-1}}).$$

Броевите a и b ги определуваме од условот да интервалот на доверба е со минимална должина, односно бараме броеви a и b така да разликата $b - a$ е минимална при услов (4.36). Од симетријата на студентова распределба околу нулата заклучуваме дека за $a = -b$ се добива интервал на доверба со минимална должина. Тогаш, равенството (4.36) преминува во

$$1 - \alpha = P\{|\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}| < b\} = 1 - P\{|\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{S}_n}\sqrt{n-1}| \geq b\}.$$

Означуваме со $t_{n,\alpha}$ број за кој важи $P\{|t_n| > t_{n,\alpha}\} = \alpha$, каде t_n е случајна променлива со студентова распределба со n степени на слобода. Според тоа, $b = t_{n-1,\alpha}$ и $a = -t_{n-1,\alpha}$.

(3) Интервал на доверба за σ^2 кога m е познато

Поаѓајќи од фактот дека $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$ е непристрасен оценувач за σ^2, може да не "инспирира" да за централна статистика во овој случај ја земеме статистиката

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i - m}{\sigma})^2 \sim \chi_n^2.$$

Бараме броеви a и b $(a, b > 0)$ така што

$$1 - \alpha = P\{a < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{\sigma^2} < b\}.$$

Од равенството

$$P\{a < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{\sigma^2} < b\} = P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{b} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{a}\},$$

заклучуваме дека $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за σ^2 е

$$(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{b}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{a}).$$

Броевите a и b ги определуваме од условите

$$P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{\sigma^2} < a\} = \alpha/2 \text{ и } P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{\sigma^2} > b\} = \alpha/2.$$

Ако означиме со $\chi^2_{n,\alpha}$ број за кој важи $P\{\chi^2_n > \chi^2_{n,\alpha}\} = \alpha$, каде χ^2_n е случајна променлива со χ^2 распределба со n степени на слобода, тогаш имаме дека $a = \chi^2_{n,1-\alpha/2}$ и $b = \chi^2_{n,\alpha/2}$.

(4) Интервал на доверба за σ^2 кога m не е познато

За централна статистика за σ^2 ја земаме статистиката

$$T = \frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Тогаш, бараме броеви a и b $(a, b > 0)$ така што

$$1 - \alpha = P\{a < \frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} < b\}.$$

Од равенството

$$P\{a < \frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} < b\} = P\{\frac{n\overline{S}_n^2}{b} < \sigma^2 < \frac{n\overline{S}_n^2}{a}\},$$

заклучуваме дека $100(1-\alpha)\%$ интервал на доверба за σ^2 е

$$(\frac{n\overline{S}_n^2}{b}, \frac{n\overline{S}_n^2}{a}).$$

Броевите a и b ги определуваме од условите

$$P\{\frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} < a\} = \alpha/2 \text{ и } P\{\frac{n\overline{S}_n^2}{\sigma^2} > b\} = \alpha/2.$$

Тогаш, имаме дека $a = \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ и $b = \chi^2_{n-1,\alpha/2}$.

Ирена Стојковска