Прилози

A Некои помошни тврдења

Делта метод. *Нека важи*

$$a_n(X_n - \theta) \xrightarrow{dist.} Z,$$

каде θ *е константа,* $\{a_n\}$ *е низа од реални броеви така што* $\lim_{n\to+\infty} = +\infty$ *и* Z *е случајна променлива. Ако* $g(x)$ *е непрекинато диференцијабилна функција во* $x = \theta$*, тогаш*

$$a_n(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{dist.} g'(\theta)Z.$$

Доказ. Од $a_n(X_n - \theta) \xrightarrow{dist.} Z$ се добива дека $X_n \xrightarrow{P} \theta$. Имено за $\varepsilon > 0$,

$$P\{|X_n - \theta| < \varepsilon\} = P\{-a_n\varepsilon < a_n(X_n - \theta) < a_n\varepsilon\} \longrightarrow F_Z(+\infty) - F_Z(-\infty) = 1,$$

кога $n \to +\infty$. Понатаму, од услов $g(x)$ е непрекината функција, па нејзиниот Тајлоров развој во $x = \theta$ е

$$g(X_n) = g(\theta) + g'(\theta_n^*)(X_n - \theta),$$

каде θ_n^* е меѓу X_n и θ, односно важи $|\theta_n^* - \theta| \leq |X_n - \theta|$. Затоа, од $X_n \xrightarrow{P} \theta$, следи дека $\theta_n^* \xrightarrow{P} \theta$, и од $g'(x)$ непрекината во $x = \theta$ селеди дека $g'(\theta_n^*) \xrightarrow{P} g(\theta)$. Сега,

$$a_n(g(X_n) - g(\theta)) = g'(\theta_n^*)a_n(X_n - \theta) \xrightarrow{dist.} g'(\theta)Z,$$

според теоремата на Slutsky за $X_n = a_n(X_n - \theta)$ и $Y_n = g'(\theta_n^*)$. **Забелешка.** Тврдењето важи и во поопшт случај, кога $g(x)$ не мора да е непрекинато диференцијабилна функција. ∎

Теорема на Slutsky. *Нека* $X_n \xrightarrow{dist.} X$ *и* $Y_n \xrightarrow{P} \theta$, *каде* θ *е константа. Тогаш,*

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{dist.} X + \theta$,

(ii) $X_nY_n \xrightarrow{dist.} \theta X$,

(ii) $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{dist.} \frac{X}{\theta}$.