5

Тестирање на хипотези

5.1 Основни поими

Често при забележување на вредностите на обележјето X при некое истражување, обележето X не е потполно определено. Во тој случај се јавува потреба од поставување на одредени претпоставки во врска со некои својства на случајната променлива X. Овие претпоставки се нарекуваат **статистички хипотези**, а постапката за донесуване на одлука за прифаќање или отфрлање на статистичката хипотеза се нарекува **тестирање на статистичка хипотеза**.

Нека $\mathcal{P} = \{F(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$ е фамилијата од допустливи распределби на обележјето X. Хипотезите кои ги фиксираат вредностите на непознатите параметри θ или го намалуваат просторот на параметри Θ се нарекуваат **параметарски хипотези**. Хипотезите кои не зависат од непознатите параметри се нарекуваат **непараметарски хипотези**.

Пример 5.1. Примери за параметарски хипотези:

(а) Обележјето X има математичко очекување $m > m_0$.

(б) Обележјето X кое е распределено според Поасонов закон на распределба има математичко очекување енакво на даден број λ_0.

(в) Нормално распределените обележја X и Y со дисперзии $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_0^2$ имаат еднакви математички очекувања т.е. $m_X = m_Y$.

Примери за непараметарски хипотези:

(г) Обележјето X има $\mathcal{P}(2)$ распределба.

(д) Обележјето X има нормална распределба.

(ѓ) Обележјата X и Y се независни.

Ако статистичката хипотеза еднозначно ја определува распределбата на обележјето X, тогаш таа се нарекува **проста хипотеза**. Во спотивно, ако само ја намалува фамилијата од допустливи распределби, се нарекува **сложена хипотеза**. Така, хипотезите (б) и (г) од Пример 5.1 се прости, останатите се сложени.

Нека H_0 е хипотеза за обележјето X која сакаме да ја тестираме. Една од задачите на математичката статистика е да врз основа на реализацијата $(x_1, x_2, ..., x_n)$ на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$ донесе одлука за прифаќање или отфрлање на хипотезата H_0. Правилото со кое врз основа на реализацијата $(x_1, x_2, ..., x_n)$ на примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$ се одлучува дали ја прифаќаме или отфрламе хипотезата H_0 се нарекува **статистички тест**. Со статистичкиот тест се проверува дали реализацијата $(x_1, x_2, ..., x_n) \in C$, при што множеството $C \subseteq \mathbb{R}^n$ се нарекува **критична област**, и ако $(x_1, x_2, ..., x_n) \in C$ тогаш **хипотезата** H_0 **се отфрла**, а ако $(x_1, x_2, ..., x_n) \notin C$, тогаш **хипотезата** H_0 **се прифаќа**.

Една карактеристика на статистичкиот тест е **ниво на значајност на тестот** $\alpha \in (0, 1)$, кое се дефинира како горна граница на веројатноста да примерокот $(X_1, X_2, ..., X_n)$ прима вредности од критичната област C, при услов хипотезата H_0 да е точна, односно

$$P\{(X_1, X_2, ..., X_n) \in C | H_0\} \leq \alpha. \tag{5.1}$$

Најмалата вредност на α за кое е исполнет условот (5.1) се нарекува **големина на критичната област** C или **големина на тестот**.

При тестирање на хипотези бројот α однапред го задаваме со тоа што за α земаме "мали" вредности, на пример $\alpha = 0.05$ или $\alpha = 0.01$. Имено, во случај на мали вредности за α природно е да се отфрли хипотезата H_0 како неточна, ако $(x_1, x_2, ..., x_n) \in C$, затоа што тогаш настанот $\{(X_1, X_2, ..., X_n) \in C | H_0\}$ ќе има мала веројатност.

Прифаќањето на хипотезата H_0 означува дека меѓу реализацијата на примерокот и теориската распределба на обележјето на дадено ниво на значајност не постои значително отстапување. Но, исто така важи и дека при прифаќање на хипотезата H_0 не мора да значи дека таа е точна, додека пак при нејзино отфрлање можно е таа да е точна.

Критичната област C обично е определна со помош на некоја **тест статистика** $T_n = T_n(X_1, X_2, ..., X_n)$. За тест статистиката претпоставуваме дека е позната нејзината точна распределба (или приближна распределба при големи вредности на n). Ако H_0 е сложена хипотеза претпоставуваме дека распределбата на тест статистиката е иста за сите распределби на обележјето обфатени со хипотезата H_0. Имено, тест статистиката го карактеризира отстапувањето на реализацијата на примерокот од природно очекуваната вредност, под претпоставка H_0 да е точна.

Хипотезата H_0 која се тестира обично се нарекува **нулта хипотеза**. Додека, претпоставката за облежјето X со која се претпоставува нешто кое не е обфатено со нултата хипотеза, а сепак е допустливо, се нарекува **алтернативна хипотеза** и се означува со H_1. Во случај на отфрлање на нултата хипотеза H_0, **алтернативната хипотеза H_1 се прифаќа**.

При тестирање на една иста статистичка хипотеза H_0 може да се користат различни тестови, односно различни критични области. Тестовите меѓусебно се споредуваат според направените грешки при отфрлање на H_0 кога таа е точна (**грешка од прв вид**) и прифаќање на H_0 кога е точна H_1 (**грешка од втор вид**). Ако веројатноста за грешка од прв вид ја означиме со α и веројатноста за грешка од втор вид ја означиме со β имаме дека

$$\alpha = P\{(X_1, X_2, ..., X_n) \in C | H_0\} = P_0\{(X_1, X_2, ..., X_n) \in C\}, \tag{5.2}$$

$$\beta = P\{(X_1, X_2, ..., X_n) \notin C | H_1\} = P_1\{(X_1, X_2, ..., X_n) \notin C\}. \tag{5.3}$$

Пожелно е грешките од прв и втор вид да бидат што е можно помали. Меѓутоа обично со смалување на грешката од прв вид се зголемува грешката од втор вид. Затоа, постапка за избирање на критичната област е следната: Најнапред се фиксира веројатноста за грешка од прв вид α, а потоа меѓу сите критични области со големина α се избира онаа за која веројатноста за грешка од втор вид β е минимална.

Веројатноста за правилно отфрлање на H_0 кога H_1 е точна се нарекува **моќ на тестот** и се означува со p т.е.

$$p = P\{(X_1, X_2, ..., X_n) \in C | H_1\} = 1 - \beta. \tag{5.4}$$

Па, заради претходната дискусија за начинот на избирање на критичната област, може да кажеме дека со таа постапка сме добиле **најмоќен тест** за однапред дадена веројатност за грешка од прв вид α.

5.2 Тестирање на параметарски хипотези

Нека $\mathcal{P} = \{F(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$ е фамилијата од допустливи распределби на обележјето X, каде θ е непознат параметар и Θ е просторот од параметри. Една параметарска хипотеза има облик $H_0 : \theta \in \Theta_0$, каде $\Theta_0 \subseteq \Theta$. Ако Θ_0 е едноелемнтно множество, тогаш H_0 е проста хипотеза. При тестирање на нултата хипотеза H_0, за алтернативна хипотеза се зема хипотезата $H_1 : \theta \in \Theta_1$, каде $\Theta_1 \subseteq \Theta \setminus \Theta_0$.

5.2.1 Нејман-Пирсонов тест

Нека обележјето X има функција на распределба $F(x,\theta)$, каде θ е непознат параметар. Сакаме да ја тестираме нултата проста хипотеза $H_0 : \theta = \theta_0$, наспроти алтернативната проста хипотеза $H_1 : \theta = \theta_1$. При тоа, целта ни е да најдеме најмоќен тест за однапред дадена веројатност за грешка од прв вид α. Одговор на ова прашање ни дава Лемата на Нејман-Пирсон.

Теорема 5.1 (Лема на Нејман-Пирсон). *За секои $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0,1)$, постои реален број $c \in \mathbb{R}$, така што при тестирање на нултата хипотеза $H_0 : \theta = \theta_0$, против алтернативната хипотеза $H_1 : \theta = \theta_1$, може да се најде најмоќен тест со оптимален критичен домен C_0 од облик*

$$C_0 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \frac{L(x;\theta_1)}{L(x;\theta_0)} \geq c\},$$

каде $L(x;\theta)$ е функцијата на подобност на примерокот $(X_1, ..., X_n)$.

Доказ. Доказот ќе го изведеме за апсолутно непрекинато обележје X со густина на распределба $p(x;\theta)$. Нека $(X_1, ..., X_n)$ е примерок со големина n кој одговара на обележјето X. Ќе покажеме дека за $\alpha \in (0,1)$, постои $c \in \mathbb{R}$ така што

$$P_0\{\frac{L(X_1, ..., X_n;\theta_1)}{L(X_1, ..., X_n;\theta_0)} \geq c\} = \alpha, \tag{5.5}$$

што ќе значи дека за дадено ниво на значајност на тестот α постои критичен домен со големина α од обликот

$$\{x : \frac{L(x;\theta_1)}{L(x;\theta_0)} \geq c\}. \tag{5.6}$$

Потоа ќе ја покажеме неговата оптималност.

Дефинираме $h(c) = P_0\{\frac{L(X_1,...,X_n;\theta_1)}{L(X_1,...,X_n;\theta_0)} \geq c\}$. Функцијата $h(c)$ е опаѓачка и важи $h(0) = 1$. За секој $c \in \mathbb{R}$ означуваме $A_c = \{x : \frac{L(x;\theta_1)}{L(x;\theta_0)} \geq c\} \subset \mathbb{R}^n$. Тогаш,

$$\begin{aligned} 1 \;&\geq\; P_1\{\frac{L(X_1, ..., X_n;\theta_1)}{L(X_1, ..., X_n;\theta_0)} = \int_{A_c} L(x;\theta_1)\, dx \geq \\ &\geq\; c \int_{A_c} L(x;\theta_0)\, dx = c\, P_0\{\frac{L(X_1, ..., X_n;\theta_1)}{L(X_1, ..., X_n;\theta_0)} = c\, h(c), \end{aligned}$$

од каде следи дека $h(c) \leq \frac{1}{c}$ за секој $c > 0$, и $\lim_{c\to\infty} h(c) = 0$. Па, ако $h(c)$ е непрекината функција, тогаш за произволен $\alpha \in (0,1)$ постои $c \in \mathbb{R}$ таков што $h(c) = \alpha$.

Ирена Стојковска

Оптималноста на критичниот домен C_0 со големина α од обликот (5.6) ја покажуваме на следниот начин. Нека C е произволен критичен домен со големина α. Ако $P_1\{(X_1,...,X_n) \in C\Delta C_0\} = 0$,[1] тогаш важи дека

$$P_1\{(X_1,...,X_n) \in C\} = P_1\{(X_1,...,X_n) \in C_0\},$$

односно

$$P_1\{(X_1,...,X_n) \notin C\} = P_1\{(X_1,...,X_n) \notin C_0\}. \tag{5.7}$$

Нека $P_1\{(X_1,...,X_n) \in C\Delta C_0\} \neq 0$. Тогаш, имаме

$$P_1\{(X_1,...,X_n) \in C\} = \int_C L(x;\theta_1)\,dx = \int_{C\cap C_0} L(x;\theta_1)\,dx + \int_{C\cap\overline{C_0}} L(x;\theta_1)\,dx.$$

Слично,

$$P_1\{(X_1,...,X_n) \in C_0\} = \int_{C_0} L(x;\theta_1)\,dx = \int_{C_0\cap C} L(x;\theta_1)\,dx + \int_{C_0\cap\overline{C}} L(x;\theta_1)\,dx.$$

Со одземање на последните две равенства добиваме

$$\begin{aligned}
& P_1\{(X_1,...,X_n) \in C\} - P_1\{(X_1,...,X_n) \in C_0\} = \\
= \ & \int_{C\cap\overline{C_0}} L(x;\theta_1)\,dx - \int_{C_0\cap\overline{C}} L(x;\theta_1)\,dx \leq \\
\leq \ & c\int_{C\cap\overline{C_0}} L(x;\theta_0)\,dx - c\int_{C_0\cap\overline{C}} L(x;\theta_0)\,dx = \\
= \ & c\Big(\int_{C\cap\overline{C_0}} L(x;\theta_0)\,dx + \int_{C\cap C_0} L(x;\theta_0)\,dx - \\
& - \int_{C\cap C_0} L(x;\theta_0)\,dx - \int_{C_0\cap\overline{C}} L(x;\theta_0)\,dx\Big) = \\
= \ & c\Big(\int_{C} L(x;\theta_0)\,dx - \int_{C_0} L(x;\theta_0)\,dx\Big) = \\
= \ & c\,(\alpha - \alpha) = 0,
\end{aligned}$$

од каде следува дека

$$P_1\{(X_1,...,X_n) \in C\} \leq P_1\{(X_1,...,X_n) \in C_0\},$$

односно

$$P_1\{(X_1,...,X_n) \notin C\} \geq P_1\{(X_1,...,X_n) \notin C_0\}. \tag{5.8}$$

Од (5.7) и (5.8) заклучуваме дека веројатноста за грешка од втор вид β е најмала ако за критичен домен со големина α се земе C_0 од облик (5.6). ■

Следните примери ја покажуваат примената на Лемата на Нејман-Пирсон при наоѓање на најмоќни тестови.

[1] $C\Delta C_0 = (C\cup C_0)\setminus(C\cap C_0) = (C\cap\overline{C_0})\cup(\overline{C}\cap C_0)$

Пример 5.2. Нека обележјето X има $\mathcal{N}(m,1)$ распределба, каде m е непознат параметар. За дадена големина на примерокот n и ниво на значајност (веројатност за грешка од прв вид) α, со примена на Лемата на Нејман-Пирсон ќе конструираме најмоќен тест за проверка на хипотезата $H_0 : m = m_0$, против $H_1 : m = m_1$, кога $m_0 < m_1$.

Густината на распределба на обележјето X е

$$p_X(x,m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}},$$

за $x \in \mathbb{R}$, од каде добиваме дека функцијата на подобност е

$$L(x,m) = (2\pi)^{-n/2} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2\},$$

за $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Да го пресметаме количникот на функциите на подобност за $m = m_1$ и $m = m_0$, односно

$$\frac{L(x;m_1)}{L(x;m_0)} = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2\}}{\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2\}} =$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((x_i - m_1)^2 - (x_i - m_0)^2)\} = \exp\{(m_1 - m_0)\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2}(m_1^2 - m_0^2)\}.$$

Според Лемата на Нејман-Пирсон за даденото $\alpha \in (0,1)$ постои $c \in \mathbb{R}$ така што оптималниот критичен домен има облик

$$C_0 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \frac{L(x;m_1)}{L(x;m_0)} \geq c\}.$$

Неравенството $\frac{L(x;m_1)}{L(x;m_0)} \geq c$ е еквивалентно со

$$(m_1 - m_0)\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2}(m_1^2 - m_0^2) \geq \ln c,$$

па имајќи во предвид дека $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$ и $m_1 - m_0 > 0$ (од условот дека $m_0 < m_1$), добиваме

$$\overline{x} \geq \frac{\ln c}{n(m_1 - m_0)} + \frac{1}{2}(m_1 + m_0) = c_0,$$

односно оптималниот критичен домен има облик

$$C_0 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \overline{x} \geq c_0\},$$

каде $c_0 \in \mathbb{R}$ се наоѓа од условот $P\{(X_1, ..., X_n) \in C_0 | H_0\} = \alpha$. Бидејќи под претпоставка H_0 да е точна $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(m_0, \frac{1}{n})$, од каде $\sqrt{n}(\overline{X}_n - m_0) \sim \mathcal{N}(0,1)$, и затоа имаме дека

$$\alpha = P\{(X_1, ..., X_n) \in C_0 | H_0\} = P_0\{\overline{X}_n \geq c_0\} =$$

$$= P_0\{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m_0) \geq \sqrt{n}(c_0 - m_0)\} = \frac{1}{2} - \Phi_0(\sqrt{n}(c_0 - m_0)),$$

каде $\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ е интегралот на Лаплас чии вредности се читаат од таблица. Значи,

$$c_0 = m_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi_0^{-1}(\frac{1 - 2\alpha}{2}).$$

Веројатноста за грешка од втор вид е

$$\beta = P\{(X_1, ..., X_n) \notin C_0 | H_1\} = P_1\{\overline{X}_n < c_0\} =$$

$$= P_1\{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m_1) < \sqrt{n}(c_0 - m_1)\} = \frac{1}{2} + \Phi_0(\sqrt{n}(c_0 - m_1)) =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi_0(\sqrt{n}(m_0 - m_1) + \Phi_0^{-1}(\frac{1 - 2\alpha}{2})).$$

Да забележиме дека, ако $m_0 > m_1$, тогаш оптималниот критичен домен ќе има облик

$$C_0 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \overline{x} \leq c_0\},$$

каде

$$c_0 = m_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi_0^{-1}(\frac{2\alpha - 1}{2}),$$

и веројатноста за грешка од втор вид ќе биде

$$\beta = \frac{1}{2} - \Phi_0(\sqrt{n}(m_0 - m_1) + \Phi_0^{-1}(\frac{2\alpha - 1}{2})).$$

На пример, при тестирање на $H_0 : m = 0$ против $H_1 : m = 1$ со ниво на значајност $\alpha = 0,05$, врз основа на дадена низа статистички податоци $x_1, ..., x_n$ со големина $n = 100$, критичната вредност c_0 е

$$\begin{aligned} c_0 &= m_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi_0^{-1}(\frac{1 - 2\alpha}{2}) = 0 + \frac{1}{\sqrt{100}} \Phi_0^{-1}(\frac{1 - 2 \cdot 0,05}{2}) = \\ &= \frac{1}{10} \Phi_0^{-1}(0,45) = \frac{1}{10} \cdot 1,645 = 0,1645, \end{aligned}$$

значи оптималниот критичен домен е

$$C_0 = \{x : \overline{x} \geq 0,1645\}.$$

Ирена Стојковска

Доколку за дадените податоци важи $\overline{x} \geq 0,1645$, тогаш H_0 се отфрла, во спротивно, таа се прифаќа. Веројатноста за грешка од втор вид е

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{2} + \Phi_0(\sqrt{n}(m_0 - m_1) + \Phi_0^{-1}(\frac{1-2\alpha}{2})) = \frac{1}{2} + \Phi_0(\sqrt{100}(0-1) + \Phi_0^{-1}(\frac{1-2\cdot 0,05}{2})) = \\ &= \frac{1}{2} + \Phi_0(-10 + \Phi_0^{-1}(0,45)) = \frac{1}{2} + \Phi_0(-10 + 1,645) = \frac{1}{2} + \Phi_0(-8,355) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.\end{aligned}$$

Пример 5.3. Нека обележјето X има $\mathcal{E}(\lambda)$ распределба, каде $\lambda > 0$ е непознат параметар. Нека се дадени големината на примерокот n и нивото на значајност α. Според Лемата на Нејман-Пирсон постои најмоќен тест за проверка на хипотезата $H_0 : \lambda = \lambda_0$, против $H_1 : \lambda = \lambda_1$, кога $\lambda_0 < \lambda_1$, кој се наоѓа на следниот начин. Бидејќи густината на распределба на обележјето X е

$$p(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda},$$

за $x > 0$, добиваме дека функцијата на подобност на примерокот $(X_1, ..., X_n)$ е

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i},$$

за $x_i > 0$, $i = 1, ..., n$. Тогаш, количникот на функциите на подобност за $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_0$ е

$$\frac{L(x;\lambda_1)}{L(x;\lambda_0)} = (\lambda_0/\lambda_1)^n \exp\{(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}) \sum_{i=1}^n x_i\}.$$

Според Лемата на Нејман-Пирсон за даденото $\alpha \in (0, 1)$ постои $c \in \mathbb{R}$ така што оптималниот критичен домен има облик

$$C_0 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \frac{L(x;\lambda_1)}{L(x;\lambda_0)} \geq c\}.$$

Неравенството $\frac{L(x;\lambda_1)}{L(x;\lambda_0)} \geq c$ е еквивалентно со

$$(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}) \sum_{i=1}^n x_i \geq \ln(c(\lambda_1/\lambda_0)^n),$$

и беидејќи $\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} > 0$, од условот $\lambda_0 < \lambda_1$, имаме дека последното неравенство е еквивалентно на

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{\ln(c(\lambda_1/\lambda_0)^n)}{\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}} = c_0,$$

односно оптималниот критичен домен има облик

$$C_0 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c_0\}.$$

Бројот $c_0 \in \mathbb{R}$ се наоѓа од условот $P\{(X_1, ..., X_n) \in C_0 | H_0\} = \alpha$. Кога H_0 е точна, имаме дека $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda_0)$ и $\frac{2}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$ (покажи!). Па, c_0 го наоѓаме од

$$\alpha = P\{(X_1, ..., X_n) \in C_0 | H_0\} = P_0\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq c_0\} = P_0\{\frac{2}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{2c_0}{\lambda_0}\},$$

од каде заклучуваме дека $\frac{2c_0}{\lambda_0} = \chi^2_{2n,\alpha}$, односно $c_0 = \frac{\lambda_0}{2} \chi^2_{2n,\alpha}$. (Да се потсетиме дека со $\chi^2_{n,\alpha}$ го означувавме бројот за кој важи $P\{\chi^2_n > \chi^2_{n,\alpha}\} = \alpha$, каде χ^2_n е случајна променлива со χ^2 распределба со n степени на слобода и кој се чита од таблица)

Веројатноста за грешка од втор вид е

$$\beta = P\{(X_1, ..., X_n) \notin C_0 | H_1\} = P_1\{\sum_{i=1}^{n} X_i < c_0\} =$$

$$= P_1\{\frac{2}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{2c_0}{\lambda_1}\} = 1 - P_1\{\frac{2}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{2c_0}{\lambda_1}\} = 1 - P_1\{\frac{2}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \chi^2_{2n,\alpha}\},$$

односно од β е такво што $\chi^2_{2n,1-\beta} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \chi^2_{2n,\alpha}$.

5.2.2 Рамномерно најмоќни тестови

Нека $\mathcal{P} = \{F(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$ е фамилијата од допустливи распределби на обележјето X, каде θ е непознат параметар и $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ е просторот од параметри. Претпоставуваме дека за произволни $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ задоволени се условите од Лемата Нејман-Пирсон, т.е. може да се определи оптимален критичен домен $C_0 = C_0(\alpha, \theta_0, \theta_1) \subseteq \mathbb{R}$ со големина α за тестирање на хипотезата $H_0 : \theta = \theta_0$ против $H_1 : \theta = \theta_1$. Ако C_0 не зависи од вредноста на параметарот $\theta_1 \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$, тогаш множеството C_0 се нарекува **рамномерно оптимален критичен домен** за тестирање на хипотезата $H_0 : \theta = \theta_0$ против $H_1 : \theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$. Соодветниот статистички тест е нарекува **рамномерно најмоќен тест**. Многу често рамномерниот најмоќен тест постои само при така наречени **еднострани алтернативни хипотези** од облик $H_1^+ : \theta > \theta_0$ или $H_1^- : \theta < \theta_0$.

Пример 5.4. Нека обележјето X има $\mathcal{N}(m, 1)$ распределба, каде m е непознат параметар. Во Пример 5.2 видовме дека оптималниот критичен домен за тестирање на $H_0 : m = m_0$ против $H_1 : m = m_1$ зависеше од врската меѓу m_0

и m_1 (се добиваа различни оптимални критични домени, кога $m_0 < m_1$ и кога $m_0 > m_1$). Тоа значи дека во овој случај не постои рамномерно оптимален критичен домен при тестирање на $H_0 : m = m_0$ против $H_1 : m \neq m_0$.

Но затоа, рамномерно оптималниот критичен домен при тестирање на $H_0 : m = m_0$ против $H_1^+ : m > m_0$ е $C_0 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \overline{x} \geq c_0\}$, каде $c_0 = m_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi_0^{-1}(\frac{1-2\alpha}{2})$. Слично, оптималниот критичен домен при тестирање на $H_0 : m = m_0$ против $H_1^- : m < m_0$ е $C_0 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \overline{x} \leq c_0\}$, каде $c_0 = m_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi_0^{-1}(\frac{2\alpha-1}{2})$.

5.2.3 Тестови со коефициент на подобност

Нека $\mathcal{P} = \{F(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$ е фамилијата од допустливи распределби на обележјето X, каде θ е непознат параметар и Θ е просторот од параметри. При тестирање на простата хипотеза $H_0 : \theta = \theta_0$ против простата хипотеза $H_1 : \theta = \theta_1$ одговор на прашањето за најмоќен тест ни дава Лемата на Нејман-Пирсон. Во случај кога барем една од хипотезите, нултата или алтернативната, е сложена за наоѓање на критична област со големина α се користи **методот со коефициент на подобност** кој претставува еден вид на обопштување на тестот на Нејман-Пирсон.

При тестирање на нултата хипотеза $H_0 : \theta \in \Theta_0$ против алтернативната хипотеза $H_1 : \theta \in \Theta_1$ со методот со коефициент на подобност се користи тест статистиката

$$\lambda(X_1, ..., X_n) = \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L(X_1, ..., X_n; \theta)}{\max_{\theta \in \Theta} L(X_1, ..., X_n; \theta)} \tag{5.9}$$

која се нарекува **коефициент на подобност** (LR - likelihood ratio). Да забележиме дека ако $\widehat{\theta}$ е такво да $\max_{\theta \in \Theta} L(X_1, ..., X_n; \theta) = L(X_1, ..., X_n; \widehat{\theta})$, тогаш $\widehat{\theta}$ е ML оценувач за параметарот θ. Исто така, ако H_0 е проста хипотеза т.е. $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, тогаш $\max_{\theta \in \Theta_0} L(X_1, ..., X_n; \theta) = L(X_1, ..., X_n; \theta_0)$.

За коефициентот на подобност важи

$$0 \leq \lambda(x_1, ..., x_n) \leq 1.$$

Веројатноста дека вредноста на $\lambda(x_1, ..., x_n)$ е голема, е поголема тогаш кога хипотезата H_0 е точна и обратно, таа е релативно мала кога H_0 не е точна. Затоа, разумно е критичната област C да се одбере така да ги содржи оние вредности на $x = (x_1, ..., x_n)$ за кои соодветниот коефициент на подобност не е поголем од даден број c $(0 < c \leq 1)$ т.е. има облик

$$C = \{x = (x_1, ..., x_n) : \lambda(x_1, ..., x_n) \leq c\}.$$

Постапката за наоѓање на критичен домен со големина α со метод со коефициент на подобност е да при дадени вредности на големината на примерокот