„СЕДИ ДОМА" – недела 1

ЕМПИРИСКА ФУНКЦИЈА НА РАСПРЕДЕЛБА НА ПРИМЕРОКОТ, СТАТИСТИКИ И КАРАКТЕРИСТИКИ НА НЕКОИ СТАТИСТИКИ

(Задачи за решавање)

Задача 1. Нека се дадени два независни примерока $X=(X_1,...,X_{n_1})$ и $Y=(Y_1,...,Y_{n_2})$ кои одговараат на обележја со еднаква дисперзија σ^2. Нека $Z=(X_1,...,X_{n_1},Y_1,...,Y_{n_2})$ е примерок добиен со спојување на примероците X и Y. Нека $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и $\overline{Z}$ се соодветно средините на примероците X, Y и Z. Покажи дека $D(\overline{Z}-\overline{X})=\frac{n_2\sigma^2}{n_1(n_1+n_2)}$.

Задача 2. Нека $(X_1,...,X_n)$ е примерок кој одговара на обележје $X\sim N(m_1,\sigma_1{}^2)$, $(Y_1,...,Y_m)$ кој одговара на обележје $Y\sim N(m_2,\sigma_2{}^2)$, и нека овие два примерока се независни еден од друг. Покажи дека

а) статистиката $U=\overline{X}_n-\overline{Y}_m=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j\sim N(m_1-m_2,\frac{\sigma_1{}^2}{n}+\frac{\sigma_2{}^2}{m})$,

б) статистиката $V=\frac{1}{\sigma_1{}^2}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{\sigma_2{}^2}\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j\sim N(\frac{nm_1}{\sigma_1{}^2}+\frac{mm_2}{\sigma_2{}^2},\frac{n}{\sigma_1{}^2}+\frac{m}{\sigma_2{}^2})$.

Задача 3*. Нека $(X_1,...,X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X со $EX=m$, $DX=\sigma^2$, $EX^k=m_k$ и $E(X-m)^k=\mu_k$, тогаш

$$D(\overline{S}_n{}^2)=\frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mu_4-\frac{n-3}{n-1}\mu_2{}^2\right),$$

каде $\overline{S}_n{}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$ е дисперзијата на примерокот, а $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ е средината на примерокот.

Задача 4*. а) Покажи дека за дисперзијата на примерокот $\overline{S}_n{}^2$ важи дека $\overline{S}_n{}^2\xrightarrow{c.c.}\sigma^2$, $n\to\infty$.

б) Покажи дека дисперзијата на примерокот $\overline{S}_n{}^2$ има асимптотска $N(\sigma^2,\frac{1}{n}(\mu_4-\sigma^2))$ распределба.