3

Основни поими на математичката статистика

Задача 3.1. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето X со функција на распределба $F(x)$. Најди ги распределбите на подредените статистики $X_{(1)} = \min\{X_1, ..., X_n\}$ и $X_{(n)} = \max\{X_1, ..., X_n\}$.

Решение. За функцијата на распределба на $X_{(1)}$ имаме

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= P\{X_{(1)} < x\} = P\{\min\{X_1, ..., X_n\} < x\} = \\ &= 1 - P\{\min\{X_1, ..., X_n\} \geq x\} = 1 - P\{X_1 \geq x, ..., X_n \geq x\} = \\ &= 1 - (1 - P\{X_1 < x\}) \cdots (1 - P\{X_n < x\}) = 1 - (1 - F(x))^n, \end{aligned}$$

додека за функцијата на распределба на $X_{(n)}$ имаме

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P\{X_{(n)} < x\} = P\{\max\{X_1, ..., X_n\} < x\} = \\ &= P\{X_1 < x, ..., X_n < x\} = P\{X_1 < x\} \cdots P\{X_n < x\} = (F(x))^n. \end{aligned}$$

Задача 3.2. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележје $X \sim \mathcal{E}(\beta)$. Покажи дека статистиката $T_n = \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$.

Решение. Дефинираме случајна променлива $Y = \frac{2}{\beta} X$, каде $X \sim \mathcal{E}(\beta)$. Тогаш, за распределбата на Y имаме

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\frac{2}{\beta} X < y\} = P\{X < \frac{\beta y}{2}\} = F_X(\frac{\beta y}{2}),$$

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(\frac{\beta y}{2}) \cdot \frac{\beta}{2} = p_X(\frac{\beta y}{2}) \cdot \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\beta}\, e^{-\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\beta y}{2}} \cdot \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\, e^{-y/2},\ y > 0,$$

односно $Y \sim \mathcal{E}(2) \equiv \Gamma(1, 2)$. Бидејќи $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е примерок кој одговара на обележјето $X \sim \mathcal{E}(\beta)$, следи дека $X_i \sim \mathcal{E}(\beta)$, $i = 1, 2, ..., n$, од каде $Y_i = \frac{2}{\beta} X_i \sim \mathcal{E}(2) \equiv \Gamma(1, 2)$, $i = 1, 2, ..., n$. Од Задача 1.8, следи дека $T_n = \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma(n, 2) \equiv \chi^2_{2n}$, што требаше да се покаже.