1

Елементи од теорија на веројатност

1.1 Случајни променливи

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност.

- **Случајна променлива** дефинирана на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е реално вредносна функција $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ која е мерлива во однос на $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ т.е. за сите Борелови множества $B \in \mathcal{B}$ важи $\xi^{-1}(B) = \{w : \xi(w) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{F}$.

- Функцијата $P_\xi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ дефинирана со $P_\xi(B) = P\{w : \xi(w) \in B\} = P(\xi^{-1}(B))$ се нарекува **закон на случајната променлива** ξ.

- Функцијата $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$F_\xi(x) = P_\xi((-\infty, x]) = P\{w : \xi(w) \leq x\} = P(\xi \leq x)$$

  се нарекува **функција на распределба** на случајната променлива ξ.

  Основни својства: F_ξ е непрекината од десно, F_ξ е неопаѓачка функција, $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$.

- Случајната променлива ξ е **дискретна** ако множеството од сите можни вредности на ξ, односно $\xi(\Omega)$, е конечно или преброиво.

  Случајната променлива I_A дефинирана со

$$I_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases},$$

  е пример за дискретна случајна променлива со $I_A(\Omega) = \{0, 1\}$ и се нарекува **индикатор на настанот** $A \in \mathcal{F}$.

- Случајната променлива ξ е **апсолутно непрекината** ако нејзината функција на распределба е апсолутно непрекината функција т.е. постои ненегативна функција $p_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така да

  $$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(u)du$$

  за сите $x \in \mathbb{R}$. Функцијата p_ξ се нарекува **густина на распределба** на ξ.

  Основни својства: $p_\xi(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$, и $P\{\xi \in B\} = \int_B p_\xi(x)dx$, за произволно Борелово множество $B \in \mathcal{B}$.

Теорема 1.1. *Нека $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ се случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Тогаш секоја функција $f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ е исто така случајна променлива.*

* * *

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност и нека $n > 1$ е цел број.

- Функцијата $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}^n$ се нарекува **повеќедимензионална случајна променлива** или **случаен вектор** ако за сите Борелови множества $B \in \mathcal{B}^n$ важи $\zeta^{-1}(B) = \{w : \zeta(w) \in B\} \in \mathcal{F}$.

  Покомпонентно, $\zeta(w) = (\zeta_1(w), \zeta_2(w), ..., \zeta_n(w))$, $w \in \Omega$, каде $\zeta_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$. Се покажува дека $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ се случајни променливи ако и само ако $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ е n-димензионален случаен вектор.

- Функцијата $P_\zeta : \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}$ дефинирана со $P_\zeta(B) = P\{w : \zeta(w) \in B\} = P(\zeta^{-1}(B))$ се нарекува **закон на случајниот вектор** ζ.

- Функцијата $F_\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинирана со

  $$F_\zeta(x_1, x_2, ..., x_n) = P(\zeta_1 \leq x_1, \zeta_2 \leq x_2, ..., \zeta_n \leq x_n)$$

  се нарекува **функција на распределба** на $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$.

- Случајниот вектор $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ е од **апсолутно непрекинат тип**, ако F_ζ е апсолутно непрекината т.е. постои ненегативна функција $p_\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ така да

  $$F_\zeta(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} p_\zeta(u_1, ..., u_n)du_1...du_n$$

  за сите $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Функцијата p_ζ се нарекува **густина на распределба** на ζ.

- Случајните променливи $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ велиме дека се **независни** ако за секој избор на Борелови множества $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}$ имаме

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, ..., \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2)...P(\xi_n \in B_n).$$

Случајни променливи $\{\xi_i\}_{i\in I}$, каде I е произволно индексно множество, велиме дека се **независни** ако за секое конечно множество од различни индекси $i_1, ..., i_k \in I$ случајните променливи $\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}$ се независни.

Теорема 1.2. *Нека $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ се независни апсолутно непрекинати случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со густини на распределба $p_{\xi_1}, p_{\xi_2}, ..., p_{\xi_n}$ соодветно. Тогаш, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ е апсолутно непрекинат случаен вектор со густина на распределба*

$$p_\xi(x_1, x_2, ..., x_n) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)...p_{\xi_n}(x_n)$$

за сите $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

* * *

Нека $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ е случаен вектор дефиниран на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Ако $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ се дискретни случајни променливи, **условна распределба на** $(\zeta_1, ..., \zeta_k)$ **при услов** $\zeta_{k+1} = x_{k+1}, ..., \zeta_n = x_n$ се дефинира како

$$\begin{aligned} &P(\zeta_1 = x_1, ..., \zeta_k = x_k \mid \zeta_{k+1} = x_{k+1}, ..., \zeta_n = x_n) = \\ &= \frac{P(\zeta_1 = x_1, ..., \zeta_k = x_k, \zeta_{k+1} = x_{k+1}, ..., \zeta_n = x_n)}{P(\zeta_{k+1} = x_{k+1}, ..., \zeta_n = x_n)}, \end{aligned}$$

за $P(\zeta_{k+1} = x_{k+1}, ..., \zeta_n = x_n) > 0$, при тоа условната распределба е функција од $x_1, ..., x_k$ при фиксни $x_{k+1}, ..., x_n$.

- Ако $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ е од апсолутно непрекинат тип со густина на распределба $p_\zeta(x_1, x_2, ..., x_n)$, **условна распределба на** $(\zeta_1, ..., \zeta_k)$ **при услов** $\zeta_{k+1} = x_{k+1}, ..., \zeta_n = x_n$ се дефинира како

$$p_{\zeta_1,...,\zeta_k}(x_1, ..., x_k \mid x_{k+1}, ..., x_n) = \frac{p_\zeta(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n)}{p_{\zeta_{k+1},...,\zeta_n}(x_{k+1}, ..., x_n)},$$

за $p_{\zeta_{k+1},...,\zeta_n}(x_{k+1}, ..., x_n) > 0$, и при тоа условната распределба е функција од $x_1, ..., x_k$ при фиксни $x_{k+1}, ..., x_n$.

Ирена Стојковска

1.1.1 Математичко очекување

Нека $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ е случајна променлива дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Нека P_ξ е закон на случајната променлива ξ и F_ξ е функција на распределба на ξ.

- **Математичко очекување** на ξ е **Лебеговиот интеграл**

$$E\xi = \int_\Omega \xi(w)P(dw) = \int_\Omega \xi dP.$$

- Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Тогаш, $f(\xi)$ е случајна променлива и за нејзиното математичко очекување важи

$$Ef(\xi) = \int_\Omega f(\xi)dP = \int_\mathbb{R} f(x)P_\xi(dx) = \int_\mathbb{R} f(x)dF_\xi(x).$$

  Последниот интеграл е познат како **Лебег-Стилтјесов интеграл**.

Теорема 1.3. *Нека ξ е случајна променлива дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција.*

(а) Ако ξ е дискретна случајна променлива со закон на распределба $P\{\xi = x_i\} = p_i$, $i \in I$, и ако $\sum_i |f(x_i)|p_i < +\infty$, тогаш математичкото очекување на $f(\xi)$ постои како конечен број и се пресметува според

$$Ef(\xi) = \sum_i f(x_i)p_i.$$

(б) Ако ξ е апсолутно непрекината случајна променлива со густина на распределба p_ξ, и ако $\int_\mathbb{R} |f(x)|p_\xi(x)dx < +\infty$, тогаш математичкото очекување на $f(\xi)$ постои како конечен број и се пресметува според

$$Ef(\xi) = \int_\mathbb{R} f(x)p_\xi(x)dx.$$

При специјални избори на функцијата f во Теорема 1.3 добиваме:

- Ако $f(x) = x$ имаме дека $E\xi = \sum_i x_i p_i$ за дискретна случајна променлива, и $E\xi = \int_\mathbb{R} xp_\xi(x)dx$ за апсолутно непрекината случајна променлива.
- За $f(x) = x^k$ се добива k**-тиот момент** на ξ, односно $E\xi^k$.
- Ако $E\xi$ постои и е конечно, тогаш $E(\xi - E\xi)^k$ е k**-тиот централен момент** на ξ.

- Вториот централен момент на ξ се нарекува **дисперзија** (или **варијанса**), и се означува со $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$. Квадратниот корен од дисперзијата се нарекува **стандардна девијација**, и се означува со $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Теорема 1.4 (Основен облик на неравенството на Чебишев). *Нека ξ е ненегативна случајна променлива дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш, за секој позитивен реален број $\varepsilon > 0$,*

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}. \tag{1.1}$$

Теорема 1.5 (Неравенство на Чебишев). *Нека ξ е случајна променлива дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со математичко очекување $E\xi < +\infty$ и дисперзија $var(\xi)$, и нека $\varepsilon > 0$ е позитивен реален број. Тогаш,*

$$P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \tag{1.2}$$

Својство 1.1. *Нека ξ и μ се случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $E\xi$ и $E\mu$ постојат, и нека c е реален број. Тогаш важат следните тврдења:*

(а) $E(c\xi) = cE\xi$,

(б) *ако* $\xi(w) \leq \mu(w)$ *за секој* $w \in \Omega$, *тогаш* $E\xi \leq E\mu$,

(в) $|E\xi| \leq E|\xi|$,

(г) $E(\xi + \mu) = E\xi + E\mu$,

(д) *ако* ξ *и* μ *се независни, тогаш* $E(\xi\mu) = E\xi E\mu$,

(ѓ) $D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2$,

(е) $D\xi \geq 0$,

(ж) $D(c) = 0$ *и* $D(c\xi) = c^2 D\xi$,

(з) *ако* $D(\xi) = 0$, *тогаш* $P\{\xi = c\} = 1$,

(ѕ) *ако* ξ *и* μ *се независни, тогаш* $D(\xi + \mu) = D\xi + D\mu$.

* * *

Нека ξ и μ се случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со $0 < D\xi < +\infty$ и $0 < D\mu < +\infty$.

- **Коваријанса** на ξ и μ е бројот дефиниран со
$$cov(\xi,\mu) = E(\xi - E\xi)(\mu - E\mu) = E(\xi\mu) - E\xi E\mu.$$
- За случајните променливи ξ и μ важи $D(\xi \pm \mu) = D\xi \pm 2cov(\xi,\mu) + D\mu$.
- **Коефициент на корелација** на ξ и μ е бројот дефиниран со
$$\rho(\xi,\mu) = \frac{cov(\xi,\mu)}{\sqrt{var(\xi)}\sqrt{var(\mu)}}.$$
- Ако ξ и μ се независни, тогаш $cov(\xi,\mu) = 0$ и $\rho(\xi,\mu) = 0$.
- За коефициентот на корелација важи неравенството $|\rho(\xi,\mu)| \leq 1$.

* * *

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност, и $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ е случајна променлива дефинирана на него.

- **Проширена случајна променлива** е функцијата $\mu : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ за која $\mu^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ за сите Борелови множества $B \in \mathcal{B}$.
- **Условно математичко очекување** $E(\xi|\mathcal{F}_1)$ на ξ во однос на σ-подалгебрата $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ може да се дефинира ако еден од броевите $E\xi^+$ и $E\xi^-$ е конечен (каде $\xi^+ = \max\{\xi, 0\} \geq 0$ и $\xi^- = \max\{-\xi, 0\} \geq 0$ се позитивниот и негативниот дел на ξ соодветно), и тогаш $E(\xi|\mathcal{F}_1)$ е проширена случајна променлива таква да
  (i) $E(\xi|\mathcal{F}_1)$ е $\mathcal{F}_1$-мерлива, и
  (ii) за секој $A \in \mathcal{F}_1$
$$\int_A \xi dP = \int_A E(\xi|\mathcal{F}_1) dP \text{ a.s.},$$
  каде ако $E\xi$ постои, тогаш по дефиниција $\int_A \xi dP \overset{def}{=} \int_\Omega \xi I_A dP$.
- Нека ξ_1 и ξ_2 се случајни променливи. **Условно математичко очекување** $E(\xi_1|\xi_2)$ **на** ξ_1 **при услов** ξ_2 се дефинира како
$$E(\xi_1|\xi_2) \overset{def}{=} E(\xi_1|\sigma(\xi_2)),$$
  каде $\sigma(\xi_2)$ е **σ-алгебра генерирана од** ξ_2 т.е. најмалата σ-алгебра која ги содржи сите множества $\{w : \xi_2(w) \leq x\}$ за сите $x \in \mathbb{R}$.

Ирена Стојковска

- Нека $A \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ е настан. **Условна веројатност** $P(A|\mathcal{F}_1)$ **на** A **во однос на** $\mathcal{F}_1$ се дефинира како
$$P(A|\mathcal{F}_1) \stackrel{def}{=} E(I_A|\mathcal{F}_1).$$

Својство 1.2. *Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ е σ-подалгебра од σ-алгебрата $\mathcal{F}$ и нека ξ и μ се случајни променливи такви да $E\xi$ и $E\mu$ постојат. Тогаш важат следните тврдења:*

(а) *ако C е константа и $\xi = C$ a.s., тогаш $E(\xi|\mathcal{F}_1) = C$ a.s.,*

(б) *ако $\xi \leq \mu$ a.s., тогаш $E(\xi|\mathcal{F}_1) \leq E(\mu|\mathcal{F}_1)$ a.s.,*

(в) *$|E(\xi|\mathcal{F}_1)| \leq E(|\xi||\mathcal{F}_1)$ a.s.,*

(г) *за сите $a, b \in \mathbb{R}$, $E(a\xi + b\mu|\mathcal{F}_1) = aE(\xi|\mathcal{F}_1) + bE(\mu|\mathcal{F}_1)$ a.s.,*

(д) *нека $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, тогаш $E(\xi|\mathcal{F}_0) = E\xi$ a.s.,*

(ѓ) *$E(\xi|\mathcal{F}) = \xi$ a.s.,*

(е) *$E(E(\xi|\mathcal{F}_1)) = E\xi$,*

(ж) *ако $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ се σ-подалгебри од σ-алгебрата $\mathcal{F}$ такви што $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$, тогаш $E(E(\xi|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = E(\xi|\mathcal{F}_2)$ a.s.,*

(з) *ако μ е $\mathcal{F}_1$-мерлива, $E|\xi| < +\infty$ и $E|\xi\mu| < +\infty$, тогаш $E(\xi\mu|\mathcal{F}_1) = \mu E(\xi|\mathcal{F}_1)$ a.s.*

* * *

Нека ξ е случајна променлива дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со функција на распределба F_ξ.

- **Карактеристична функција** на случајната променлива ξ е функцијата $\varphi_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ дефинирана со
$$\varphi_\xi(t) = E(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x).$$

  Основни својства:

  (а) $|\varphi_\xi(t)| \leq \varphi_\xi(0) = 1$,

  (б) $\varphi_{a\xi+b}(t) = \varphi_\xi(at)e^{itb}$, за $a, b = const$,

  (в) $E\xi^k = \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}$, за $k = 0, 1, ..., n$.

  (г) Ако $\xi_1, ..., \xi_n$ се независни случајни променливи, тогаш $\varphi_{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t)...\varphi_{\xi_n}(t)$,

1.2 Некои поважни распределби на веројатност

1.2.1 Дискретни распределби

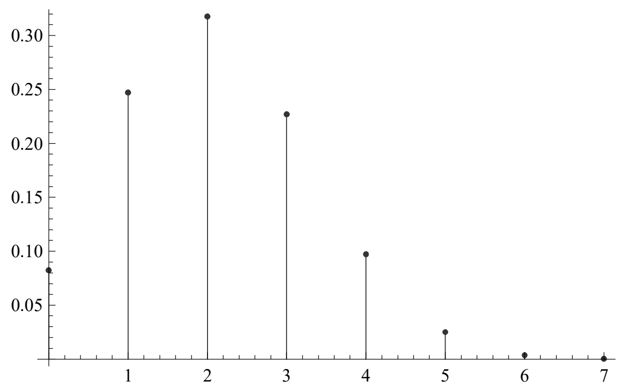
1. **Биномна распределба** $X \sim \mathcal{B}(n,p),\ n \in \mathbb{N},\ 0 < p < 1$

$$p_k = P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n$$

$EX = np,\ DX = np(1-p),\ \varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})$

За $n = 1$, распределбата $\mathcal{B}(1,p)$ се нарекува **Бернулиева распределба**, додека случајната променлива $Y \sim \mathcal{B}(1,p)$ се нарекува **индикатор на настанот** A чија веројатност за успех е p т.е. важи $P(A) = p$, и се означува со $Y = I_A$. Тогаш,

$$P\{I_A = 0\} = 1 - P(A) = 1 - p,\ P\{I_A = 1\} = P(A) = p.$$



Слика 1.1: Биномна распределба $\mathcal{B}(7; 0,3)$

За $p = 0,5$ Биномната распределба е симертична, за $p < 0,5$ таа е позитивно асиметрична (Слика 1.1), а за $p > 0,5$ таа е негативно асиметрична.

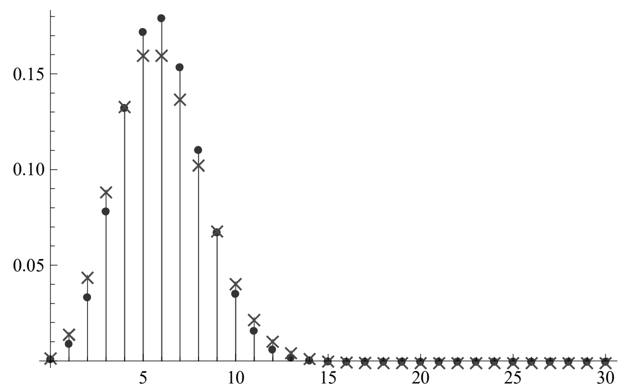
2. **Поасонова распределба** $X \sim \mathcal{P}(a),\ a > 0$

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a},\ k = 0, 1, 2, ...$$

$EX = a,\ DX = a,\ \varphi_X(t) = e^{a(e^{it}-1)}$

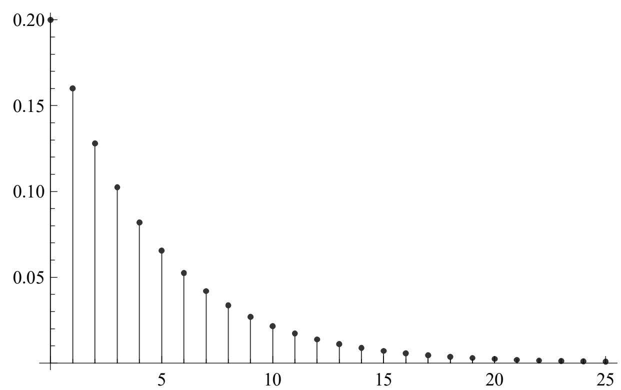
Својство 1.3. *Врската меѓу Поасонова и Биномна распределба е следната*

$$\lim_{n\to\infty,\, np\to a} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$



Слика 1.2: Биномна распределба $\mathcal{B}(30; 0,2)$ (кругчиња) и Поасонова распределба $\mathcal{P}(6)$ (крстчиња)

Претходното својство покажува дека за големи вредности на n и мали вредности на p, Биномната распрededба се апроксимира со Поасонова распределба (Слика 1.2).



Слика 1.3: Геометриска распределба $Geo(0,2)$

3. Геометриска распределба $X \sim Geo(p),\ 0 < p < 1$

$$p_k = P\{X = k\} = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, ...$$

$EX = \frac{1-p}{p},\ DX = \frac{1-p}{p^2},\ \varphi_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$

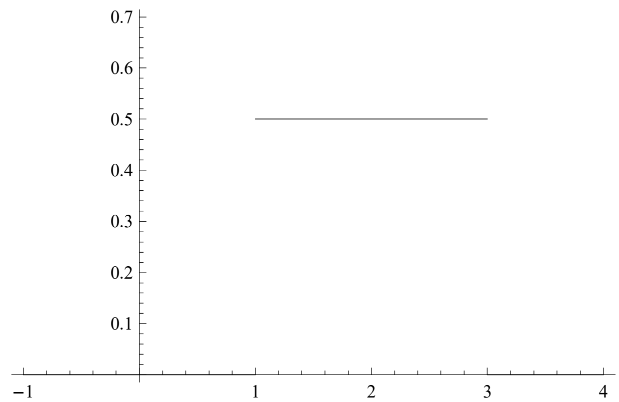
Ирена Стојковска

1.2.2 Непрекинати распределби

1. Рамномерна распределба $X \sim \mathcal{U}(a,b),\ a<b$

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a},\ a<x<b$$

$EX = \frac{a+b}{2},\ DX = \frac{(b-a)^2}{12},\ \varphi_X(t) = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$



Слика 1.4: Рамномерна распределба $\mathcal{U}(1,3)$

2. Нормална (Гаусова) распределба $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbb{R}$$

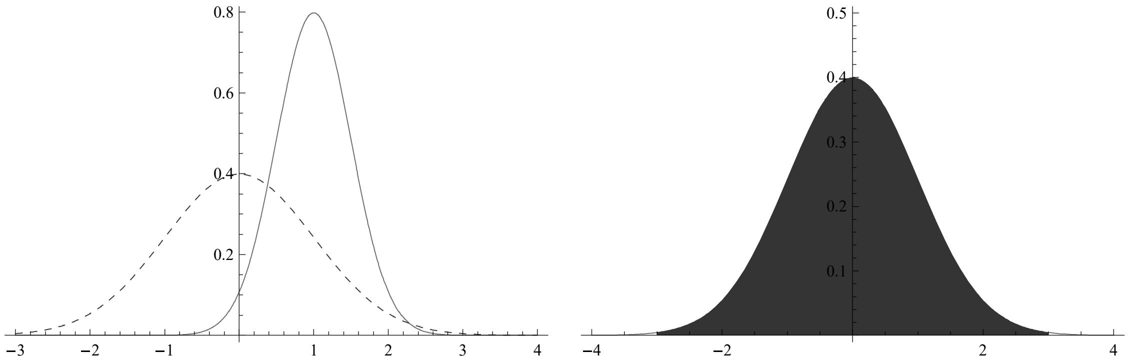
$EX = \mu,\ DX = \sigma^2,\ \varphi_X(t) = e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

За $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ нормалната распределба $\mathcal{N}(0,1)$ се нарекува **стандардна нормална распределба** или **нормална нормирана распределба** (Слика 1.5(а)).

Својство 1.4. *Ако случајната променлива X има $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ распределба, тогаш случајната променлива $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ има $\mathcal{N}(0,1)$ распределба.*

Својство 1.5. *За случајната променлива $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ важи* **правилото на три сигми**, *односно*

$$P\{\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma\} = 0,9973 = 99,7\%.$$



(а) (б)

Слика 1.5: (а) Нормална (Гаусова) распределба $\mathcal{N}(1, 0.5^2)$ (црвена полна линија) и $\mathcal{N}(0, 1)$ (сина испрекината линија), (б) Правило на три сигми илустрирано за $\mathcal{N}(0, 1)$ распределба (обоениот син дел определен со интервалот $[-3, 3]$ е $99, 7\%$ од плоштината под кривата)

Интерпретација на последното Својство 1.5 е такво да при нормална распределба $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ со интервалот $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ е опфатено скоро целокупното веројатносно оптеретување $(99, 7\%)$, Слика 1.5(б).

Својство 1.6. *Ако $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, ..., n$ се независни случајни променливи, тогаш $Y = a_1X_1 + ... + a_nX_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ каде $\mu = a_1\mu_1 + ... + a_n\mu_n$ и $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2$.*

3. Гама распределба $X \sim \Gamma(\alpha, \beta),\ \alpha > 0,\ \beta > 0$

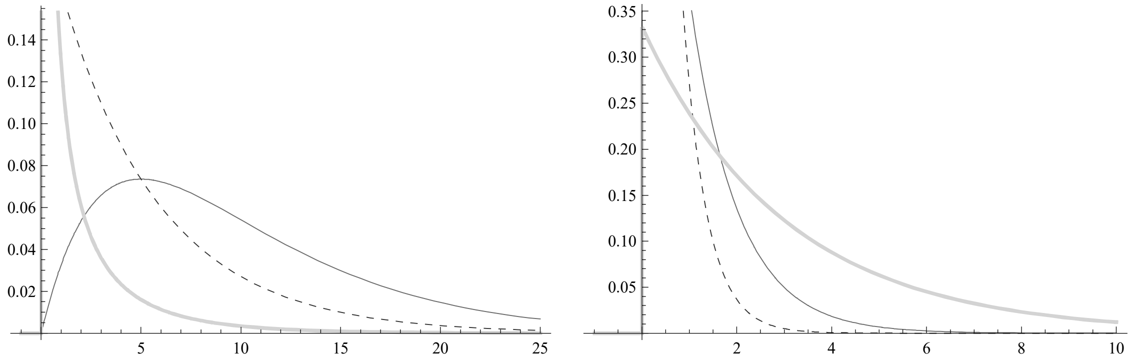
$$p_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}},\ x \geq 0,$$

каде $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\ \alpha > 0$ е **Гама функција** со својства

1) $\forall\alpha > 0,\ \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n + 1) = n!,\ \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{n}$
3) $\forall\alpha \in (0, 1),\ \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$

$EX = \alpha\beta,\ DX = \alpha\beta^2,\ \varphi_X(t) = (1 - it\beta)^{-\alpha}$

Својство 1.7. *Ако X_i, $i = 1, 2, ..., n$ се независни случајни променливи така што $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, 2, ..., n$, тогаш $Y = X_1 + ... + X_n \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ каде $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.*



(а) (б)

Слика 1.6: (а) Гама распределба $\Gamma(2,5)$ (црвена тенка линија), $\Gamma(1,5)$ (сина испрекината линија) и $\Gamma(0.2,5)$ (зелена дебела линија), (б) Експоненцијална распределба $\mathcal{E}(1)$ (црвена тенка линија), $\mathcal{E}(0.5)$ (сина испрекината линија) и $\mathcal{E}(3)$ (зелена дебела линија)

4. **Експоненцијална распределба** $X \sim \mathcal{E}(\beta),\ \beta > 0$

$$p_X(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}},\ x \geq 0$$

$EX = \beta,\ DX = \beta^2,\ \varphi_X(t) = 1 - it\beta$

Да забележиме дека експоненцијалната распределба $\mathcal{E}(\beta)$ се добива од Гама распределбата $\Gamma(\alpha,\beta)$ за $\alpha = 1$ т.е. $\Gamma(1,\beta) \equiv \mathcal{E}(\beta),\ \beta > 0$.

5. **Хи-квадрат распределба** $X \sim \chi^2_n,\ n \in \mathbb{N}$

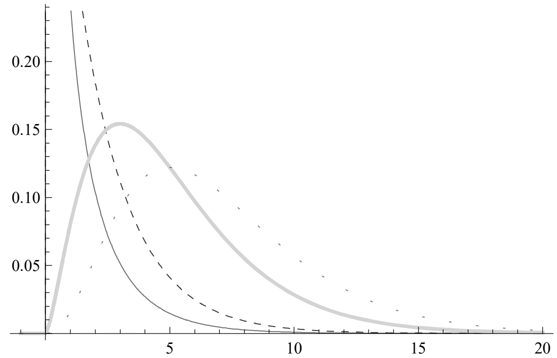
$$p_X(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot e^{-\frac{x}{2}},\ x \geq 0$$

$EX = n,\ DX = 2n,\ \varphi_X(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$

Да забележиме дека хи-квадрат распределбата χ^2_n се добива од Гама распределбата $\Gamma(\alpha,\beta)$ за $\alpha = \frac{n}{2}$ и $\beta = 2$ т.е. $\Gamma(\frac{n}{2},2) \equiv \chi^2_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Својство 1.8. *Ако* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, *тогаш* $Y = X^2 \sim \chi^2_1$.

Својство 1.9. *Ако* $X_i,\ i = 1, 2, ..., n$ *се независни и еднакво распределени случајни променливи со* $\mathcal{N}(0,1)$ *распределби, тогаш* $Y = X_1^2 + ... + X_n^2 \sim \chi^2_n$.



Слика 1.7: Хи-квадрат распределба χ_n^2, за $n = 1$ (црвена тенка линија), за $n = 2$ (сина испрекината линија), за $n = 5$ (зелена дебела линија) и за $n = 7$ (виолетова точкаста линија)

Забелешка 1.1. Бројот n во хи-квадрат распределбата χ_n^2 се нарекува **број на степени на слобода**. Со други зборови, бројот на степени на слобода го означува бројот на линеарно независни случајни променливи меѓу случајните промеливи $X_1, X_2, ..., X_n$ во изразот за случајната променлива $Y = X_1^2 + ... + X_n^2$. Така на пример, ако меѓу случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ постои една линеарна врска, на пример $X_1 + X_2 + ... + X_n = 0$, тогаш бројот на степени на слобода се намалува за еден, т.е $Y = X_1^2 + ... + X_n^2 \sim \chi_{n-1}^2$.

6. Студентова распределба $X \sim t_n$, $n \in \mathbb{N}$

$$p_X(x) = \frac{(1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}}{B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R},$$

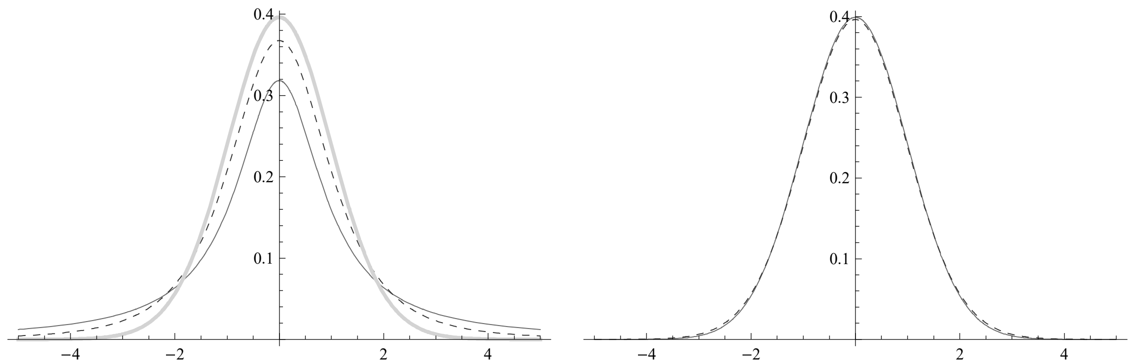
каде $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$ е **Бета функција**. Позната е следната врска помеѓу Бета и Гама функцијата

$$\forall \alpha, \beta > 0,\ B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

$EX = 0$ за $n > 1$, $DX = \frac{n}{n-2}$ за $n > 2$

И овде, бројот n во студентовата t_n распределба се нарекува **број на степени на слобода**. Да забележиме дека за $n = 1$ се добива Кошиева распределба, односно густина на распределба $p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Додека пак во пракса за $n >\ 30$, студентовата распределба може да се апроксимира со стандардна нормална распределба, имено важи $p_X(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ кога $n \to \infty$ (Слика 1.8(б)).

Својство 1.10. *Ако* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ *и* $Y \sim \chi^2_n$ *се независни случајни променливи, тогаш* $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$.



(а) (б)

Слика 1.8: (а) Студентова распределба t_n, за $n = 1$ (црвена тенка линија), за $n = 3$ (сина испрекината линија) и за $n = 36$ (зелена дебела линија), (б) Стандардна нормална распределба $\mathcal{N}(0,1^2)$ (црвена тенка линија) и студентова таспределба t_n за $n = 36$ (сина испрекината линија)

7. Фишерова распределба $X \sim F_{n_1,\,n_2}$, $n_1,\, n_2 \in \mathbb{N}$

$$p_X(x) = \frac{(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1}}{B(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})(1+\frac{n_1 x}{n_2})^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, x > 0$$

$EX = \frac{n_2}{n_2-2}$ за $n_2 > 2$, $DX = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$ за $n_2 > 4$

Својство 1.11. *Ако* $X_1 \sim \chi^2_{n_1}$ *и* $X_2 \sim \chi^2_{n_2}$ *се независни случајни променливи, тогаш* $Y = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \sim F_{n_1,n_2}$.

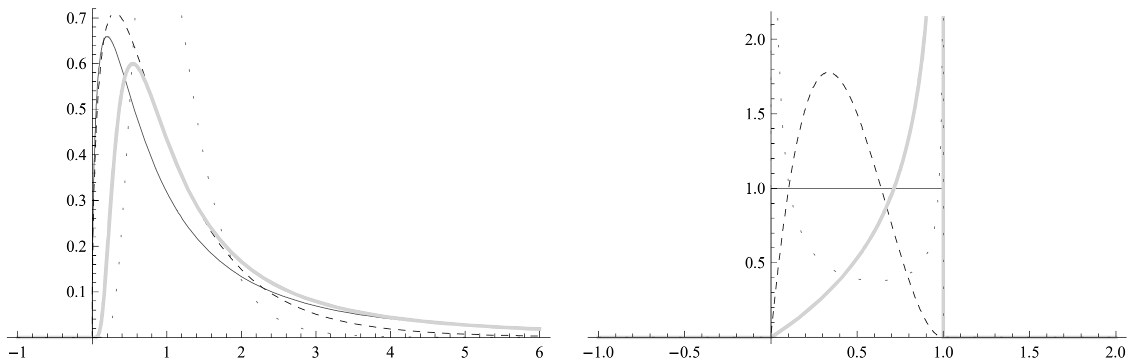
8. Бета распределба $X \sim Bet(\alpha,\beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$p_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)},\ 0 \le x \le 1$$

$EX = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $DX = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$

Да забележиме дека рамномерната распределбата $\mathcal{U}(0,1)$ се добива од Бета распределбата $Bet(\alpha,\beta)$ за $\alpha = \beta = 1$ т.е. $Bet(1,1) \equiv \mathcal{U}(0,1)$.

Ирена Стојковска



(а) (б)

Слика 1.9: (а) Фишерова распределба F_{n_1,n_2}, за $n_1 = n_2 = 3$ (црвена тенка линија), за $n_1 = 3$, $n_2 = 22$ (сина испрекината линија), за $n_1 = 22$, $n_2 = 3$ (зелена дебела линија) и за $n_1 = n_2 = 22$ (виолетова точкаста линија), (б) Бета распределба $Bet(1, 1)$ (црвена тенка линија), $Bet(2, 3)$ (сина испрекината линија), $Bet(2, 0.5)$ (зелена дебела линија) и $Bet(0.2, 0.5)$ (виолетова точкаста линија)

Својство 1.12. *Ако $X_1 \sim \mathcal{E}(\beta_1)$ и $X_2 \sim \mathcal{E}(\beta_2)$ се независни случајни променливи, тогаш $Y = \frac{1}{X_1+X_2} \sim Bet(\beta_1, \beta_2)$.*

Својство 1.13. *Ако $X \sim F_{n_1,n_2}$, тогаш $Y = \frac{(n_1/n_2)X}{1+(n_1/n_2)X} \sim Bet(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})$.*

1.3 Низи од случајни променливи

Нека $\xi_1, \xi_2, ...$ е низа од случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Нека ξ е случајна променлива дефинирана на истиот простор на веројатност.

- Ако за секој $w \in \Omega$, $\xi_n(w) \to \xi(w)$, кога $n \to \infty$, тогаш велиме дека низата од случајни променливи $\{\xi_n\}$ **конвергира по точки** кон случајната променлива ξ.

- Низата од случајни променливи $\{\xi_n\}$ **конвергира скоро сигурно** или **конвергира со веројатност еден** кон случајната променлива ξ ако

$$P\{w : \lim_{n\to\infty} \xi_n(w) = \xi(w)\} = 1.$$

Ознаки: $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$ или $\xi_n \to \xi$ a.s. или $\xi_n \to \xi$ w.p.1.

- Низата од случајни променливи $\{\xi_n\}$ **конвергира по веројатност** кон случајната променлива ξ ако

$$\forall\varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P\{w : |\xi_n(w) - \xi(w)| > \varepsilon\} = 0.$$

  Ознаки: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ или $\xi_n \to \xi$ in prob.

- Низата од случајни променливи $\{\xi_n\}$ **конвергира средно квадратно** кон случајната променлива ξ ако

$$\lim_{n\to\infty} E|\xi_n - \xi|^2 = 0.$$

  Ознаки: $\xi_n \xrightarrow{MS} \xi$ или $\xi_n \to \xi$ in m.s.

- Низата од случајни променливи $\{\xi_n\}$ **конвергира по распределба** кон случајната променлива ξ ако за функциите на распределба F_n на ξ_n и функцијата на распределба F на ξ важи

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),\ \forall x \in C,$$

  каде $C \subseteq \mathbb{R}$ е множеството од точки на непрекинатост на F.

  Ознаки: $\xi_n \xrightarrow{dist.} \xi$ или $\xi_n \to \xi$ in dist. или $\xi_n \Rightarrow \xi$.

Теорема 1.6. *Нека $\{\xi_n\}$ е низа од независни случајни променливи. Тогаш,*

$$\xi_n \to 0 \ a.s. \ \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| \geq \varepsilon\} < +\infty.$$

Својство 1.14. *Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност и нека $\xi, \xi_1, \xi_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ се случајни променливи. Тогаш важат следните тврдења:*

(а) ако $\xi_n \to \xi$ a.s., тогаш $\xi_n \to \xi$ in prob.,

(б) ако $\xi_n \to \xi$ in m.s., тогаш $\xi_n \to \xi$ in prob.,

(в) ако $\xi_n \to \xi$ in prob., тогаш $\xi_n \to \xi$ in dist.

Ирена Стојковска

1.4 Гранични теореми

Теорема 1.7 (Слаб закон на големите броеви). *Нека* $\{\xi_n\}$ *е низа од независни случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *со* $E\xi_k = m < +\infty$ *и* $var(\xi_k) = \sigma^2$ *за сите* $k = 1, 2, \ldots$. *Тогаш,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{P} m \quad \text{кога} \quad n \to \infty. \tag{1.3}$$

Теорема 1.8 (Силен закон на големите броеви). *Нека* $\{\xi_n\}$ *е низа од независни случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *со* $E\xi_k = 0$ *и* $E\xi^4 \leq c$ *за сите* $k = 1, 2, \ldots$ *и* c *е некоја позитивна константа. Тогаш,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \text{кога} \quad n \to \infty. \tag{1.4}$$

Понекогаш силниот закон на големите броеви е познат како само **закон на големите броеви**.

Теорема 1.9 (Централна гранична теорема). *Нека* $\{\xi_n\}$ *е низа од независни и еднакво распределени случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *со* $E\xi_k = m < +\infty$ *и* $var(\xi_k) = \sigma^2 > 0$ *за сите* $k = 1, 2, \ldots$. *Тогаш, за произволен* $x \in \mathbb{R}$

$$P\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du \quad \text{кога} \quad n \to \infty, \tag{1.5}$$

што значи дека

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{dist.} N(0,1) \quad \text{кога} \quad n \to \infty. \tag{1.6}$$