1

Елементи од теорија на веројатност

Задача 1.1. Ако $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со Бернулиеви $0, 1$ распределби со параметар p, $0 < p < 1$, тогаш случајната променлива $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Покажи.

Задача 1.2. Врската меѓу Поасонова и Биномна распределба е следната

$$\lim_{n\to\infty,\ np\to a} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

Покажи.

Решение. Имаме дека

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{(np)^k}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{(np)^k}{k!} \big(1 - \frac{1}{n}\big)\big(1 - \frac{2}{n}\big) \cdots \big(1 - \frac{k-1}{n}\big)(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Бидејќи, $(1-p)^{n-k} = \big((1-p)^{-1/p}\big)^{-np+kp} \to e^{-a}$, кога $np \to a$ и $p \to 0$, имаме дека

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

кога $n \to \infty,\ np \to a,\ p \to 0$. ∎

Задача 1.3. Ако $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи, при што $X_i \sim P(a_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, тогаш случајната променлива $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n \sim \mathcal{P}(a)$, каде $a = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Покажи.

Задача 1.4. Ако случајната променлива X има $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ распределба, тогаш случајната променлива $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ има $\mathcal{N}(0, 1)$ распределба. Покажи.

Решение. Нека $x \in \mathbb{R}$ е произволен. Тогаш, за функцијата на распределба за Y имаме

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{\tfrac{X-\mu}{\sigma} \leq x\} = P\{X \leq \sigma x + \mu\} = F_X(\sigma x + \mu),$$

од каде густината на распределба на Y е

$$\begin{aligned} p_Y(x) &= F_Y'(x) = F_X'(\sigma x + \mu) \cdot \sigma = p_X(\sigma x + \mu) \cdot \sigma = \\ &= \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(\sigma x + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \end{aligned}$$

и заклучуваме дека $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. ∎

Задача 1.5. Покажи дека за случајната променлива $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ важи **правилото на три сигми**, односно

$$P\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\} = 0,9973 = 99,7\%.$$

Решение. Од Својство 1.4 имаме дека $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогаш,

$$P\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\} = P\{-3\sigma \leq X - \mu \leq 3\sigma\} =$$

$$= P\{-3 \leq \tfrac{X-\mu}{\sigma} \leq 3\} = P\{-3 \leq Y \leq 3\} =$$

$$= \Phi_0(3) - \Phi_0(-3) = 2\Phi_0(3) = 2 \cdot 0,49867 = 0,9973 \approx 99,7\%,$$

каде $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$ е Лапласовиот интеграл чии вредности се читаат од таблица. ∎

Задача 1.6. Ако $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, ..., n$ се независни случајни променливи, тогаш $Y = a_1 X_1 + ... + a_n X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ каде $\mu = a_1\mu_1 + ... + a_n\mu_n$ и $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2$. Покажи.

Решение. Карактеристичните функции на случајните променливи $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, ..., n$ се

$$\varphi_{X_i}(t) = Ee^{itX_i} = e^{it\mu_i - \sigma_i^2 t^2/2}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Од својството на карактеристична функција на линеарно зависна променлива т.е. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$, имаме

$$\varphi_{a_iX_i}(t) = \varphi_{X_i}(a_it) = e^{ita_i\mu_i - \sigma_i^2 a_i^2 t^2/2}.$$

Бидејќи X_i, $i = 1, 2, ..., n$ се независни, за карактеристичната функција на $Y = a_1X_1 + ... + a_nX_n$ имаме

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \varphi_{a_1X_1+...+a_nX_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{a_iX_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{ita_i\mu_i - \sigma_i^2 a_i^2 t^2/2} = \\ &= e^{it\sum_{i=1}^n a_i\mu_i - (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 a_i^2)t^2/2},\end{aligned}$$

значи $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ каде $\mu = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i$ и $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2$. ■

Задача 1.7. Ако $X \sim \mathcal{U}(0, \beta)$, тогаш $Y = (-\frac{1}{\beta}\ln(\frac{X}{\beta})) \sim \mathcal{E}(\beta)$. Покажи.

Задача 1.8. Ако X_i, $i = 1, 2, ..., n$ се независни случајни променливи така што $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, 2, ..., n$, тогаш $Y = X_1 + ... + X_n \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ каде $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Покажи.

Решение. Карактеристичните функции на случајните променливи $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, 2, ..., n$ се

$$\varphi_{X_i}(t) = (1 - it\beta)^{-\alpha_i}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Бидејќи X_i, $i = 1, 2, ..., n$ се независни, за карактеристичната функција на $Y = X_1 + ... + X_n$ имаме

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{X_1+...+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - it\beta)^{-\alpha_i} = (1 - it\beta)^{-\sum_{i=1}^n \alpha_i},$$

од каде заклучуваме дека $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ каде $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. ■

Задача 1.9. Ако $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, тогаш $Y = X^2 \sim \chi_1^2$. Покажи.

Решение. Нека $x > 0$, тогаш за функцијата на распределба на Y имаме

$$F_Y(x) = P\{Y \le x\} = P\{X^2 \le x\} = P\{|X| \le \sqrt{x}\} = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}).$$

Густината на распределба на Y е

$$\begin{aligned}p_Y(x) &= F_Y'(x) = F_X'(\sqrt{x}) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{x}} - F_X'(-\sqrt{x}) \cdot (-\tfrac{1}{2\sqrt{x}}) = \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (p_X(\sqrt{x}) + p_X(-\sqrt{x})) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x/2} + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x/2}) = \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x/2} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2} = \tfrac{x^{-1/2}e^{-x/2}}{2^{1/2}\Gamma(1/2)},\end{aligned}$$

затоа што $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Значи, $Y \sim \chi_1^2$. ■

Задача 1.10. Ако $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, тогаш $Y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$. Покажи.

Задача 1.11. Ако X_i, $i = 1, 2, ..., n$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со $\mathcal{N}(0, 1)$ распределби, тогаш $Y = X_1^2 + ... + X_n^2 \sim \chi^2_n$. Покажи.

Решение. Од Својство 1.9 имаме дека $X_i^2 \sim \chi^2_1 \equiv \Gamma(\frac{1}{2}, 2)$, $i = 1, 2, ..., n$. Од независноста на X_i, $i = 1, 2, ..., n$ и Својство **??** имаме дека $Y = X_1^2 + ... + X_n^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, 2) \equiv \chi^2_n$. ■

Задача 1.12. Ако $X_i \sim \chi^2_{m_i}$, $i = 1, 2, ..., n$ се независни случајни променливи, тогаш $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n \sim \chi^2_m$, каде $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$. Покажи.

Задача 1.13. Ако $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $Y \sim \chi^2_n$ се независни случајни променливи, тогаш $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$. Покажи.

Решение. Од независноста на X и Y, за распределбата на случајниот вектор (X, Y) имаме

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{y^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-y/2}, \quad y > 0.$$

Воведуваме нови случајни променливи $U = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ и $V = Y$, од каде имаме дека $X = U\sqrt{V/n}$ и $Y = V$. Тогаш, за Јакобијанот на трансформацијата имаме

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{v}{n}} & \frac{u}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{v}{n}}.$$

Густината на распределба на случајниот вектор (U, V) е

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u, v) &= p_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)u^2(v/n)} \cdot \frac{v^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-v/2} \cdot (\tfrac{v}{n})^{1/2}, \quad v > 0. \end{aligned}$$

Бараната маргинална густина е

$$\begin{aligned} p_U(u) &= \int_0^{+\infty} p_{U,V}(u, v) dv = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2 v}{2n}} \cdot v^{n/2-1} \cdot e^{-v/2} \cdot (\tfrac{v}{n})^{1/2} dv = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)n^{1/2}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{u^2}{n}+1)\cdot\frac{v}{2}} \cdot v^{\frac{n+1}{2}-1} dv. \end{aligned}$$

Ставаме смена $t = (\frac{u^2}{n} + 1) \cdot \frac{v}{2}$, и тогаш

$$\begin{aligned} p_U(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot 2 \cdot (\frac{u^2}{n}+1)^{-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)n^{1/2}(\frac{u^2}{n}+1)^{\frac{n+1}{2}-1}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{n+1}{2}-1} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n/2)} \cdot (\frac{u^2}{n} + 1)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{(\frac{u^2}{n}+1)^{-\frac{n+1}{2}}}{B(1/2, n/2)\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

затоа што $B(1/2, n/2) = \frac{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$. Значи, $U \sim t_n$ т.е. $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$. ∎

Задача 1.14. Ако $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ се независни, тогаш $Y = (\frac{X_1}{X_2})$ има Кошева распределба. Покажи.

Задача 1.15. Ако $X_1 \sim \chi^2_{n_1}$ и $X_2 \sim \chi^2_{n_2}$ се независни случајни променливи, тогаш $Y = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \sim F_{n_1,n_2}$. Покажи.

Решение. Од независноста на случајните променливи X_1 и X_2, за распределбата на случајниот вектор (X_1, X_2) имаме

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{x_1^{n_1/2-1}}{2^{n_1/2}\Gamma(n_1/2)}e^{-x_1/2} \cdot \frac{x_2^{n_2/2-1}}{2^{n_2/2}\Gamma(n_2/2)}e^{-x_2/2}, \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0.$$

Воведуваме нови случајни променливи $Y_1 = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$ и $Y_2 = X_2/n_2$, од каде имаме дека $X_1 = n_1 Y_1 Y_2$ и $X_2 = n_2 Y_2$. Тогаш, Јакобијанот на трансформацијата е

$$J = \begin{vmatrix} n_1 y_2 & n_1 y_1 \\ 0 & n_2 \end{vmatrix} = n_1 n_2 y_2.$$

Густината на распределба на случајниот вектор (Y_1, Y_2) е

$$\begin{aligned} p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= p_{X_1,X_2}(x_1(y_1,y_2), x_2(y_1,y_2)) \cdot |J| = \\ &= \frac{(n_1y_1y_2)^{n_1/2-1}}{2^{n_1/2}\Gamma(n_1/2)}e^{-\frac{n_1y_1y_2}{2}} \cdot \frac{(n_2y_2)^{n_2/2-1}}{2^{n_2/2}\Gamma(n_2/2)}e^{-\frac{n_2y_2}{2}} n_1n_2y_2, \quad y_1 > 0,\ y_2 > 0. \end{aligned}$$

Бараната маргинална густина е

$$\begin{aligned} p_{Y_1}(y_1) &= \int_0^{+\infty} p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2 = \\ &= \frac{(n_1y_1)^{n_1/2-1}}{2^{n_1/2}\Gamma(n_1/2)} \cdot \frac{(n_2)^{n_2/2-1}}{2^{n_2/2}\Gamma(n_2/2)} \cdot n_1n_2 \int_0^{+\infty} y_2^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{n_1y_1y_2}{2}} y_2^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{n_2y_2}{2}} y_2\, dy_2 = \\ &= \frac{(n_1y_1)^{n_1/2-1}}{2^{n_1/2}\Gamma(n_1/2)} \cdot \frac{(n_2)^{n_2/2-1}}{2^{n_2/2}\Gamma(n_2/2)} \cdot n_1n_2 \int_0^{+\infty} y_2^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} e^{-\frac{(n_1y_1+n_2)y_2}{2}} dy_2. \end{aligned}$$

Ставаме смена $t = \frac{(n_1y_1+n_2)y_2}{2}$ и добиваме

$$\begin{aligned} p_{Y_1}(y_1) &= \frac{(n_1y_1)^{n_1/2-1}}{2^{n_1/2}\Gamma(n_1/2)} \cdot \frac{(n_2)^{n_2/2-1}}{2^{n_2/2}\Gamma(n_2/2)} \cdot n_1n_2 \cdot \frac{2^{(n_1+n_2)/2}}{(n_1y_1+n_2)^{(n_1+n_2)/2}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{(n_1y_1)^{n_1/2}}{\Gamma(n_1/2)} \cdot \frac{(n_2)^{n_2/2}}{\Gamma(n_2/2)} \cdot \frac{1}{(n_1y_1+n_2)^{(n_1+n_2)/2}} \cdot \Gamma(\tfrac{n_1+n_2}{2}) = \\ &= \frac{(\frac{n_1}{n_2})^{n_1/2} \cdot y_1^{n_1/2-1}}{B(n_1/2, n_2/2) \cdot (1 + \frac{n_1y_1}{n_2})^{(n_1+n_2)/2}}, \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека $Y_1 \sim F_{n_1,n_2}$ т.е. $Y = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \sim F_{n_1,n_2}$. ∎

Задача 1.16. Ако $X \sim F_{n_1,n_2}$, тогаш $Y = (\frac{1}{X}) \sim F(n_2, n_1)$. Покажи.

Задача 1.17. Ако $X \sim t_n$, тогаш $Y = X^2 \sim F(1, n)$. Покажи.

Задача 1.18. Ако $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ се независни случајни променливи, тогаш $Y = (\frac{X_1}{X_2})^2 \sim F_{1,1}$. Покажи.

Задача 1.19. Ако $X_1 \sim \mathcal{E}(\beta_1)$ и $X_2 \sim \mathcal{E}(\beta_2)$ се независни случајни променливи, тогаш $Y = \frac{1}{X_1+X_2} \sim Bet(\beta_1, \beta_2)$. Покажи.

Задача 1.20. Ако $X \sim F_{n_1,n_2}$, тогаш $Y = \frac{(n_1/n_2)X}{1+(n_1/n_2)X} \sim Bet(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})$. Покажи.