УНИВЕРЗИТЕТ “СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ”– СКОПЈЕ
Природно-математички Факултет
Институт за математика

Ирена Стојковска

ОСНОВИ НА ВЕРОЈАТНОСТ

Задачи

Скопје, декември 2013

Содржина

1

Комбинаторика

1.1 Варијации

Нека A е конечно множество од n елемнети т.е. $|A| = n$. Со A^k го означуваме множеството од сите подредени k-торки од елементи од A т.е.

$$A^k = \{(a_1, a_2, ..., a_k) | a_i \in A, i = 1, 2, ..., k\}.$$

- Елементите на множеството A^k се нарекуваат **варијации со повторување од n елементи класа k**. Вкупниот број на варијации со повторување од n елементи класа k се означува со $\overline{V}_n^k$ и се пресметува според формулата
$$\overline{V}_n^k = n^k, \ k \geq 1.$$

- Да го означиме со B множеството од сите подредени k-торки од различни елементи од A т.е.
$$B = \{(a_1, a_2, ..., a_k) | a_i \in A, i = 1, 2, ..., k, \ a_i \neq a_j, i \neq j\} \subseteq A^k.$$
Елементите на множеството B се нарекуваат **варијации без повторување од n елементи класа k**. Вкупниот број на варијации без повторување од n елементи класа k се означува со V_n^k и се пресметува според формулата
$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1), \ 1 \leq k \leq n.$$

- Кога $k = n$, варијациите без повторување од n елементи класа n се нарекуваат **пермутации од n елементи**, нивниот број се означува со P_n и се пресметува според формулата
$$P_n = n!.$$

- Да го означиме со X множеството од сите подредени n-торки од k различни елементи $a_1, a_2, ..., a_k$ така што елементот a_i се среќава n_i пати (при тоа $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$) т.е.

$$X = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in \{a_1, a_2, ..., a_k\},\ a_i \text{ се среќава } n_i \text{ пати}, i = 1, 2, ..., n\}$$
$$\subseteq \{a_1, a_2, ..., a_k\}^n.$$

Елементите на множеството X се нарекуваат **пермурации од n елементи тип** $(n_1, n_2, ..., n_k)$. Вкупниот број на пермурации од n елементи тип $(n_1, n_2, ..., n_k)$ се означува со $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ и се пресметува според формулата

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!},\ n_1 + n_2 + ... + n_k = n,\ 1 \leq k \leq n.$$

1.1. Колку четирицифрени броеви може да се формираат кај кои
а) сите цифри се различни,
б) во декадниот запис нема нула?

Решение. а) Првата цифра на четирицифрениот број не смее да е нула, па таа може да се избере на 9 начини. Останатите три цифри треба да се сите различни меѓу себе и различни од првата цифра, па тие се избираат од 9 цифри, и бројот на сите можни трицифрени завршетоци на четирицифрениот број е $V_9^3 = 504$. Знаејќи дека првата цифра се избира на 9 начини, заклучуваме дека може да се формираат $9 \cdot V_9^3 = 4536$ четирицифрени броеви кај кои сите цифри се различни.

б) Бидејќи во декадниот запис на четирицифрениот број нема нула, значи дека неговите цифри се избираат од 9 цифри, па може да се формираат $\overline{V}_9^4 = 6561$ такви броеви.

1.2. На колку начини од кутија со 7 бели и 3 црни топчиња може да се извлечат 2 бели и 1 црно топче, ако топчињата се извлекуваат едно по едно
а) без враќање,
б) со враќање?

Решение. а) Бројот на распореди при извлекувањето на двете бели и едното црно топче е $P_3(2, 1) = 3$ т.е. тоа се распоредите (б,б,ц), (б,ц,б) и (ц,б,б). Од 7 топчиња со влечење едно по едно топче без враќање, 2 топчиња се извлекуваат на $V_7^2 = 42$ начини. Додека од 3 топчиња со влечење едно по едно топче без враќање, 1 топче се извлекува на $V_3^1 = 3$ начини. Значи, бараниот број начини е $P_3(2, 1) \cdot V_7^2 \cdot V_3^1 = 378$.

б) Се зема само во предвид дека извлекувањето е со враќање, па бараниот број начини сега е $P_3(2, 1) \cdot \overline{V}_7^2 \cdot \overline{V}_3^1 = 441$.

1.3. На колку начини може да се распоредат на полица 3 примерока од учебникот по алгебра, 2 примерока од учебникот по геометрија и 1 примерок од учебникот по математичка анализа така што учебникот по математичка анализа да не е последен?

Решение. Вкупниот број начини на распоредување на сите учебници е $P_6(3,2,1) = 60$. Ако учебникот по математичка анализа е последен, тогаш бројот на распореди на останатите учебници е $P_5(3,2) = 10$. Па, бараниот број начини е $P_6(3,2,1) - P_5(3,2) = 50$.

1.4. На колку начини може да се наредат во редица 4 црвени и 3 зелени топчиња така што различно обоените топчиња наизменично се сместени?

Решение. Јасно е дека редоследот на топчињата е (ц,з,ц,з,ц,з,ц). Црвените топчиња може да се распоредат на $P_4 = 24$ начини, додека зелените топчиња на $P_3 = 6$ начини. Па, така бараниот број начини е $P_4 \cdot P_3 = 144$.

1.5. Околу кружна маса се наредени n столчиња. На колку начини можат n луѓе да седнат на n столчиња околу кружната маса?

Решение. Всушност тука се бара бројот на **циклични пермутации од n елементи**. Знаејќи дека n луѓе може да се распоредат на $n!$ начини на n столчиња во редица и воочувајќи дека секои n циклични распореди во редица одговараат на еден ист кружен распоред, добиваме дека бараниот број на начини е $n!/n = (n-1)!$.

1.6. На колку начини може да седнат 3 девојчиња и 2 момчиња
а) во редица со 5 столчиња,
б) во редица со 7 столчиња,
в) околу кружна маса со 5 столчиња,
г) околу кружна маса со 7 столчиња ?

Решение. а) Вкупно 5 особи треба да седнат во редица со 5 столчиња, па бараниот број начини е $P_5 = 120$.

б) Во овој случај ќе има 2 празни столчиња, па параниот број начини е $P_7(2,1,1,1,1,1) = 2520$.

в) Бараниот број начини е бројот на циклични пермутации со 5 елементи т.е. $(5-1)! = 24$ начини.

г) Во комбинација размислувањата од под б) и в) т.е. бараниот број начини во овој случај е $\frac{(7-1)!}{2!1!1!1!1!1!} = 360$.

Општо, k различни елементи $a_1, a_2, ..., a_k$ така што елементот a_i се среќава n_i пати (при тоа $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), може да се наредат во кружен распоред на $\frac{(n-1)!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$ начини. Овие распореди се нарекуваат **циклични пермутации од n елемети тип** $(n_1, n_2, ..., n_k)$.

1.2 Комбинации

Нека A е конечно множество од n елемнети т.е. $|A| = n$.

- Секое k-елементно подмножество од елементи од множеството A се нарекува **комбинација без повторување од n елементи класа k.** Вкупниот број на комбинации без повторување од n елементи класа k се означува со C_n^k и се пресметува според формулата

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, 0 \leq k \leq n.$$

- Секое k-елементно мултиподмножество од елементи од множеството A се нарекува **комбинација со повторување од n елементи класа k.** Вкупниот број на комбинации со повторување од n елементи класа k се означува со $\overline{C}_n^k$ и се пресметува според формулата

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

1.7. Од 7 ученици и 6 ученички треба да се изберат 8 претставници од кои 5 ученици. На колку начини може да се изврши изборот?

Решение. Од 7 ученици се избираат 5 на $C_7^5 = 21$ начин, додека од 6 ученички се избираат 3 на $C_6^3 = 20$ начини. Така, бараниот број начини е $C_7^5 \cdot C_6^3 = 420$.

1.8. Од еден шпил со 52 карти треба да се изберат 3. На колку начини може да се изврши изборот така да

а) сите три карти се со иста вредност,
б) сите три карти се со ист знак,
в) две карти се со иста вредност, а третата е 1-ца?

Решение. а) Во еден шпил карти има 13 различни вредности од кои една се одбира на $C_{13}^1 = 13$ начини. Од секоја вредност има по 4 карти со различен знак од кои треба да се одберат 3, па бројот на начини за тој избор е $C_4^3 = 3$. Тогаш бараниот број начини е $C_{13}^1 \cdot C_4^3 = 52$.

б) Три карти со ист знак може да се одберат на $C_4^1 \cdot C_{13}^3 = 1144$ начини.

в) Можно е сите три карти да се 1-ци, а такви избори има $C_4^3 = 4$. Ако една карта е 1-ца, а другите две имаат различна вредност, тогаш 1-цата може да се одбере на $C_4^1 = 4$ начини, додека вредноста за другите две карти може да се одбере на $C_{12}^1 = 12$ начини и двете карти со иста вредност може да се одберат на $C_4^2 = 6$ начини. Значи, бараниот број начини е $C_4^3 + C_4^1 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^2 = 292$.

1.9. На колку начини од $3n$ последователни цели броеви може да се изберат три броја така што нивниот збир да е делив со 3?

Решение. За да збирот на трите избрани броја е делив со 3 треба да настапи некој од двата случаи: сите три броја да даваат еднаков остаток при делење со 3 (т.е. или 0, 0, 0 или 1, 1, 1 или 2, 2, 2) или сите три броја да даваат различни остатоци при делење со 3 (т.е. 0, 1, 2). Да забележиме дека во $3n$ последователни цели броеви има n броеви кои се деливи со 3, n броеви кои даваат остаток 1 и n броеви кои даваат остаток 2.

Три броја сите деливи со 3 може да се изберат на C_n^3 начини. Истото се случува и ако сите три броја даваат остаток 1 и ако сите три броја даваат остаток 2. Три броја кои даваат различни остатоци може да се изберат на $(C_n^1)^3$ начини. Па, бараниот број на ини е $3C_n^3 + (C_n^1)^3 = n(3n^2 - 3n + 2)/2$.

1.10. Најди го бројот на n-торки во систем со основа 3 кои се со

а) нула на прво место,

б) $m + 2$ нули од кои две на краевите,

в) m единици.

Решение. а) Ако на првото место е нула, останатите $n - 1$ места може да се пополнат со било која од цифрите 0, 1 или 2, затоа бројот на такви n-торки е $\overline{V}_3^{n-1} = 3^{n-1}$.

б) Бидејќи на краевите има нули, остануваат m нули кои се распоредуваат на $n-2$ места на C_{n-2}^m начини. Останатите $n = m-2$ места може да се пополнат со цифрите 1 или 2 на $\overline{V}_2^{n-m-2}$ начини. Под услов $m \leq n-2$, бараниот број на n-торки е $C_{n-2}^m \cdot \overline{V}_2^{n-m-2} = \binom{n-2}{m} \cdot 2^{n-m-2}$.

в) На n места, m единици се распоредуваат на C_n^m начини. Останатите $n - m$ места може да се пополнат со цифрите 0 или 2 на $\overline{V}_2^{n-m}$ начини. Под услов $m \leq n$, бараниот број на n-торки е $C_n^m \cdot \overline{V}_2^{n-m} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$.

1.11. На колку начини може да се поделат 10 книги на 5 купчиња од по 2 книги во секое купче (при тоа не е важен редоследот на купчињата)?

Решение. Првото купче може да се избере на C_{10}^2 начини, второто на C_8^2 начини, третото на C_6^2 начини, четвртото на C_4^2 начини и петтото на C_2^2 начини. Значи, купчињата може да се одберат на $C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$ начини, каде што еден избор на 5-те купчиња се среќава во P_5 распореди. Бидејќи не е важен редоследот на купчињата, бараниот број начини е $\frac{C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{P_5} = \frac{10!}{5!(2!)^5}$.

1.3 Задачи за самостојна работа

1.12. Еден студент за 4 недели треба да полага 4 испита, од кои 2 математички. На колку начини студентот може да ги распореди испитите (еден испит во една недела) така што математичките испити да не се еден по друг?

1.13. Еден студент има 5 книги, а друг 9. Сите книги се различни. На колку начини студентите може да извршат размена на книгите, ако разменуваат
а) една за една книга,
б) две за две книги?

1.14. Колку различни десетцифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 2 и 3, така што цифрата 3 да се среќава во секој број точно два пати? Колку од тие броеви се деливи со 9?

1.15. Миле треба да испрати на својот пријател 8 различни фотографии. На колку начини тој може да ги испрати фотографиите, ако ги испраќа во 5 коверти, и при тоа не би било убаво да испрати празен коверт?

Одговори

1.12 12; **1.13** а) 45, б) 360; **1.14** 11520, 3150; **1.15** 126000;

2

Веројатностен простор

2.1 Случаен настан

- Множеството од сите логички можни исходи на некој експеримент се означува со Ω и се нарекува **простор од елементарни настани**.
- Секој поединечен исход $\omega \in \Omega$ се нарекува **елементарен настан**.
- Секое подмножество $A \subseteq \Omega$ се нарекува **случаен настан** или само **настан**. Примери за тривијални настани: Ω - **сигурен настан** и $\emptyset$ - **невозможен настан**.
- Велиме дека настанот $A \subseteq \Omega$ **се реализирал**, ако се остварил некој елементарен исход $\omega \in A$.
- **Релации меѓу настани:**
    - ⋆ $A \subseteq B$ - настанот A **го повлекува** натанот B (секогаш кога ќе се реализира настанот A, се реализира и настанот B)
    - ⋆ $A = B$ - настаните A и B **се еквивалентни** (настанот A го повлекува настанот B и настанот B го повлекува настанот A)
- **Операции со настани:**
    - ⋆ $A \cup B$ или $A + B$ - **збир** на настаните A и B (се реализира, кога ќе се реализира барем еден од настаните A или B)
    - ⋆ $A \cap B$ или AB - **производ** на настаните A и B (се реализира, кога ќе се реализираат и двата настана A и B)
    - ⋆ $A \setminus B$ - **разлика** на настаните A и B (се реализира, кога ќе се реализира настанот A, но не се реализира насанот B)

- Го означуваме со $\overline{A} = \Omega \setminus A$, **спротивниот настан на настанот** A.

N.B. *Својствата кои важат кај релации и операции со множества се пренесуваат на релациите и операциите со настани соодветно.*

2.1. Експеримент се состои во фрлање на коцка. Одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните:
а) A - паднаа парен број на точки,
б) B - паднаа број на точки делив со 3,
в) C - паднаа број на точки не помали од 3.

Решение. Означуваме со ω_k - на коцката паднаа k точки, $k = 1, 2, ..., 6$. Тогаш, просторот од елементарни настани е $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$. За останатите настани имаме, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$ и $C = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

2.2. Во една кутија има четири ливчиња нумерирани со броевите 1, 2, 3 и 4. На случаен начин од кутијата се извлекува едно по едно ливче без враќање се додека не се извлече ливче со непарен број. Одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните:
а) A - извлечено е ливчето со број 2,
б) B - збирот од броевите од извлечените ливчиња е парен број.

Решение. Ако ги означиме елементарните настани со $\omega_1 = (1)$, $\omega_2 = (3)$, $\omega_3 = (2, 1)$, $\omega_4 = (2, 3)$, $\omega_5 = (4, 1)$, $\omega_6 = (4, 3)$, $\omega_7 = (2, 4, 1)$, $\omega_8 = (2, 4, 3)$, $\omega_9 = (4, 2, 1)$ и $\omega_{10} = (4, 2, 3)$, тогаш $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{10}\}$, $A = \{\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$ и $B = \emptyset$.

2.3. Стрелец гаѓа во мета три пати, при што се забележува само погодок во целта и промашување на истата. Одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните:
а) A - постигнати се три погодоци,
б) B - целта е три пати промашена,
в) C - постигнат е барем еден погодок,
г) D - постигнато е барем едно промашување,
д) E - постигнати се не повеќе од два погодока,
ѓ) F - до третото гаѓање немало погодок.

Ако означиме со A_k - во k-тото гаѓање погодена е целта, $k = 1, 2, 3$, тогаш со помош на овие настани одговори на горните барања.

Решение. Ако означиме со 0 промашување, а со 1 погодок, тогаш елементарните настани може да ги запишеме како $\omega_1 = (0, 0, 0)$, $\omega_2 = (1, 0, 0)$, $\omega_3 = (0, 1, 0)$, $\omega_4 = (0, 0, 1)$, $\omega_5 = (1, 1, 0)$, $\omega_6 = (1, 0, 1)$, $\omega_7 = (0, 1, 1)$, $\omega_8 = (1, 1, 1)$, и тогаш $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_8\}$, $A = \{\omega_8\}$, $B = \{\omega_1\}$, $C = \{\omega_2, \omega_3, ..., \omega_8\}$, $D = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_7\}$, $E = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_7\}$, $F = \{\omega_1, \omega_4\}$.

Просторот од елементарни настани т.е. сигурниот настан опишан со настаните A_k, $k=1,2,3$ е

$$\Omega = A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

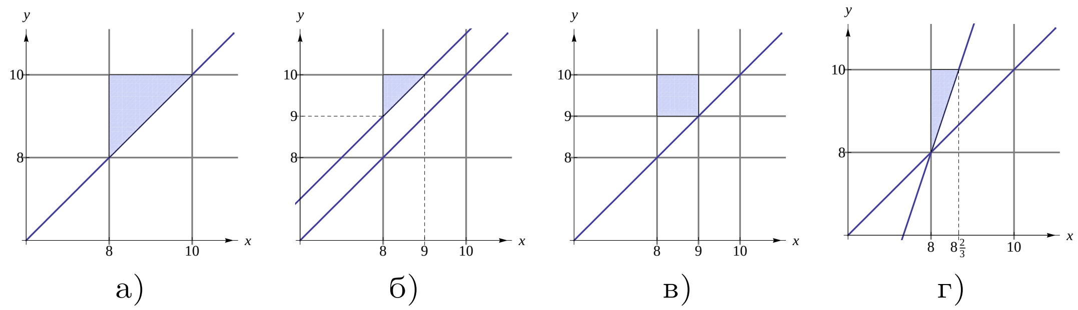
За другите настани имаме, $A = A_1A_2A_3$, $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $D = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$, $E = D = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$, $F = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 = \overline{A}_1\overline{A}_2(A_3 + \overline{A}_3) = \overline{A}_1\overline{A}_2\Omega = \overline{A}_1\overline{A}_2$.

2.4. Предавањето по некој предмет е од 8 до 10 часот. Еден студент пристигнува и си заминува во тој временски интервал. Одреди го просторот од елементарни настани (пристигнување и заминување на студентот) и опиши ги настаните:

а) A - студентот се задржал повеќе од 1 саат на предавањето,

б) B - во 9 часот студентот бил на предавањето,

в) C - студентот останал на предавањето повеќе од двојно зголеменото време што задоцнил.



Цртеж 2.1: Геометриски приказ на Ω и настаните A, B и C од задача 2.4

Решение. Означуваме со x - временскиот момент на пристигнување на студентот, а со y - временскиот момент на заминување на студентот, тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x,y) | 8 \leq x < y \leq 10\}$. За настаните имаме $A = \{(x,y) | 8 \leq x < y \leq 10, y - x > 1\}$, $B = \{(x,y) | 8 \leq x < 9 < y \leq 10\}$ и $C = \{(x,y) | 8 \leq x < y \leq 10, y - x > 2(x-8)\}$.

Геометриски, просторот Ω и настаните A, B и C претставуваат делови од рамнината (види Цртеж 2.1 а), б), в), г) соодветно).

2.2 Аксиоматика на просторот на веројатност

Нека Ω е просторот од елеменатарни настани, $\mathcal{F}$ е σ-алгебра од подмножества од Ω и $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ е реална функција за која важат следните аксиоми:

(1) ненегативност: $P(A) \geq 0$ за сите $A \in \mathcal{F}$,

(2) нормираност: $P(\Omega) = 1$,

(3) адитивност: $P(A + B) = P(A) + P(B)$ за $A, B \in \mathcal{F}$, $AB = \emptyset$,

(4) непрекинатост: $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Тогаш, подредената тројка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ се нарекува **простор на веројатност**, функцијата P се нарекува **веројатност**, а аксиомите (1)-(4) се нарекуваат **аксиоми на теоријата на веројатност**.

N.B. Аксиомите (3)-(4) може да се заменат со следната аксиома:

(3*) преброива адитивност: за сите $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ такви што $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, важи $P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

При тоа, се покажува дека аксиомите (1)-(4) ги повлекуваат аксиомите (1)-(2), (3*), и обратно.

Својства:

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $P(A) \leq 1$

3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4) монотоност: Ако $A \subseteq B$, тогаш $P(A) \leq P(B)$

5) Ако $B \subseteq A$, тогаш $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$

6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

7) За секој n и настани $A_1, A_2, ..., A_n$,

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i\neq j} P(A_iA_j) + \sum_{i\neq j\neq k\neq i} P(A_iA_jA_k) - ... \\ &\quad +(-1)^{n+1} P(A_1A_2...A_n). \end{aligned}$$

8) **Лема на покривање.** $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

2.5. Нека A и B се произволни настани. Најди ги веројатностите $P(A\,\overline{B})$ и $P(\overline{A}\,\overline{B})$, ако се познати $P(A) = a$, $P(B) = b$ и $P(A \cup B) = c$.

Решение. Од равенството $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$ имаме дека

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = a - P(AB). \tag{2.1}$$

Од $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ имаме

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = a + b - c. \tag{2.2}$$

Со замена на (2.2) во (2.1) се добива

$$P(A\overline{B}) = a - (a + b - c) = c - b.$$

За втората веројатност имаме

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - c.$$

2.6. Пресметај ја веројатноста дека се реализирал точно еден од настаните A, B и C, ако е познато дека $P(AB) = a$, $P(BC) = b$, $P(AC) = c$, $P(ABC) = d$ и $A \cup B \cup C = \Omega$.

Решение. Се бара веројатноста на настанот $D = A\;\overline{B}\;\overline{C} + \overline{A}\;B\;\overline{C} + \overline{A}\;\overline{B}\;C$. Прво ја наоѓаме веројатноста $P(A\,\overline{B}\,\overline{C})$. Имаме,

$$\begin{aligned} P(A\,\overline{B}\,\overline{C}) &= P(\overline{\overline{A} \cup B \cup C}) = \\ &= 1 - P(\overline{A} \cup B \cup C) = \\ &= 1 - P(\overline{A}) - P(B) - P(C) + \\ &\quad + P(\overline{A}B) + P(\overline{A}C) + P(BC) - P(\overline{A}BC). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Од $P(B) = P(AB + \overline{A}B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$, имаме дека

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - a. \tag{2.4}$$

На сличен начин се добива дека

$$P(\overline{A}C) = P(C) - c. \tag{2.5}$$

Исто така, имаме дека

$$P(\overline{A}BC) = P(BC \setminus ABC) = P(BC) - P(ABC) = b - d. \tag{2.6}$$

Сега, со замена на (2.4)-(2.6) во (2.3) добиваме

$$\begin{aligned} P(A\,\overline{B}\,\overline{C}) &= 1 - P(\overline{A}) - P(B) - P(C) + \\ &\quad + P(B) - a + P(C) - c + b - b + d = \\ &= P(A) - a - c + d. \end{aligned}$$

Аналогно се добива дека

$$P(\overline{A}\,B\,\overline{C}) = P(B) - b - a + d \text{ и } P(\overline{A}\,\overline{B}\,C) = P(C) - c - b + d.$$

Конечно,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A\,\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}\,B\,\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}\,C) \\ &= P(A) - a - c + d + P(B) - b - a + d + P(C) - c - b + d = \\ &= P(A \cup B \cup C) + P(AB) + P(AC) + P(BC) - P(ABC) - 2(a+b+c) + 3d = \\ &= P(\Omega) + a + c + b - d - 2(a+b+c) + 3d = 1 - (a+b+c) + 2d. \end{aligned}$$

2.7. Нека A, B, C се произволни настани. Ако $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,7$, $P(C) = 0,6$ и $P(ABC) = 0$, најди ги веројатностите $P(AB)$ и $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

Решение. Од $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,7$ и $P(A \cup B) \leq 1$, имаме дека

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq 0,7 + 0,7 - 1 = 0,4. \tag{2.7}$$

Од друга страна, од $P(ABC) = 0$ и $P(C) = 0,6$ имаме дека

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(ABC + AB\overline{C}) = P(ABC) + P(AB\overline{C}) = P(AB\overline{C}) \leq \\ &\leq P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,6 = 0,4. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Од (2.7) и(2.8) заклучуваме дека $P(AB) = 0,4$. За веројатноста на настанот $\overline{A}\,\overline{B}$ имаме

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,\overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - 0,7 - 0,7 + 0,4 = 0. \end{aligned}$$

2.8. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ и B се произволни настани и нека $A_1A_2...A_n \subseteq B$. Докажи дека $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - P(B) \leq n - 1$.

Решение. Од условот $A_1A_2...A_n \subseteq B$ имаме дека $P(A_1A_2...A_n) \leq P(B)$. Користејќи ја Лемата на покривање имаме

$$\begin{aligned} P(B) &\geq P(A_1A_2...A_n) = P(\overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... \cup \overline{A_n}}) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... \cup \overline{A_n}) \geq \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)) = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \end{aligned}$$

од каде се добива бараното неравенство.

2.9. Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$, $P(\{\omega_n\}) = c \cdot (\frac{4}{5})^n$, $n = 1, 2, ...$ Одреди ја вредноста на константата c.

Решение. За веројатноста на сигурниот настан имаме

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot (\frac{4}{5})^n = c \cdot \frac{4}{5} \cdot (1 + \frac{4}{5} + (\frac{4}{5})^2 + ...) = \\ &= c \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1 - 4/5} = 4c. \end{aligned}$$

Аксиомата за нормираност вели дека $P(\Omega) = 1$, значи $4c = 1$, од каде $c = 1/4$.

2.3 Класична дефиниција на веројатност

Едноставен пример за простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е за $\Omega = \{w_1, ..., w_N\}$ т.е. **конечен простор од елемнтарни настани**, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ и веројатност дефинирана со $P(w_i) = 1/N$, $i = 1, 2, ..., N$ т.е. **секој елементарен настан е еднакдовероjатен**. Тогаш, за $A \subseteq \Omega$ имаме

$$P(A) = \frac{|A|}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

равенство познато како **класична дефиниција на веројатност**.

2.10. Колкава е веројатноста дека при фрлање на хомогена коцка ќе се појават парен број на точки?

Решение. Ако елементарните настани на овој експеримент ги означиме со w_i - паднаа i точки, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, тогаш просторот елементарни настани е $\Omega = \{w_1, ..., w_6\}$ и притоа секој елементарен настан има еднакви шанси за појавување затоа што коцката е хомогена. Се бара веројатноста на настанот A - паднаа парен број на точки, кој изразен преку елементарните настани е $A = \{w_2, w_4, w_6\}$.

Според класичната дефиниција на веројатност за веројатноста на настанот A имаме $P(A) = |A|/|\Omega| = 3/6 = 1/2 = 0,5$.

2.11. Три монети, едната од 1 денар, втората од 2 денари и третата од 5 денари се фрлаат истовремено и по нивното паѓање се разгледува појавувањето на "грб", односно "пара". Да се пресметаат веројатностите на следните настани:

A - на монетата од 1 денар се појавил "грб",
B - се појавиле точно два "грба",
C - се појавиле не повеќе од два "грба".

Решение. За овој експеримент, просторот од елементарни настани е

$$\Omega\{(\text{п,п,п}),(\text{п,п,г}),(\text{п,г,п}),(\text{г,п,п}),(\text{п,г,г}),(\text{г,п,г}),(\text{г,г,п}),(\text{г,г,г})\},$$

каде на пример, елементарниот настан (г,п,г) озна ува дека на монетата од 1 денар се појавил "грб", на монетата од 2 денари се појавила "пара" и на монетата од 5 денари се појавил "грб". При тоа, секој елементарен настан има еднакви шанси на појавување, затоа што појавувањето на "грб", односно "пара" кај секоја од монетите е еднакловероаjтно и исходите кај секоја од монетите се независни од исходите кај останатите монети.

Настаните A и B изразени преку елементарните настани се

$$A = \{(\text{г,п,п}),\ (\text{г,п,г}),\ (\text{г,г,п}),\ (\text{г,г,г})\} \text{ и } B = \{(\text{п,г,г}),\ (\text{г,п,г}),\ (\text{г,г,п})\},$$

па според класичната дефиниција на веројатност имаме

$$P(A) = |A|/|\Omega| = 4/8 = 1/2 = 0,5 \text{ и } P(B) = |B|/|\Omega| = 3/8 = 0,375.$$

Веројатноста на настанот C, ќе ја одредиме разгледувајќи го спротивниот настан $\overline{C}$ - се појавиле повеќе од два грба. Имаме дека $\overline{C} = \{(\text{г,г,г})\}$, па според класичната дефиниција на веројатност $P(\overline{C}) = |\overline{C}|/|\Omega| = 1/8 = 0,125$. Сега, за веројатноста на настанот C имаме $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,125 = 0,875$.

2.12. Дадени се пет отсечки од 2, 4, 5, 7 и 9 единици. Одреди ја веројатноста дека од случајно избрани три отсечки може да се конструира триаголник.

Решение. Множеството елементарни настани е $\Omega = \{\{a,b,c\}|a,b,c \in \{2,4,5,7,9\}\}$ т.е. се состои од сите триелементни подмножества од множеството $\{2,4,5,7,9\}$, па затоа $|\Omega| = C_5^3 = 10$. При тоа, секој избор на триелементно подмножество е еднакловеројатен.

Настанот A - од избрани три отсечки од множеството $\{2,4,5,7,9\}$ може да се конструира триаголник, изразен преку елементарните настани е

$$A = \{\{2,4,5\},\{4,5,7\},\{4,7,9\},\{5,7,9\}\},$$

па според класичната дефиниција на веројатност $P(A) = |A|/|\Omega| = 4/10 = 0,4$.

2.13. Се фрлаат две коцки за играње. Најди ја веројатноста дека збирот на паднатите точки е 5, а нивниот производ е 4.

Решение. Множеството елементарни настани на овој експеримент е

$$\Omega = \{(x_1,x_2)|x_1,x_2 \in \{1,...,6\}\},$$

каде x_i е бројот на паднати точки на i-та коцка, $i = 1,2$, па $|\Omega| = \overline{V}_6^2 = 36$.

Настанот A - збирот на паднатите точки е 5, а нивниот производ е 4, изразен преку елементарните настани е $A = \{(1,4),(4,1)\}$, па според класичната дефиниција на веројатност $P(A) = |A|/|\Omega| = 2/36 = 1/18 \approx 0,056$.

2.14. Броевите $1, 2, ..., n$ на случаен начин се наредени во еден ред. Која е веројатноста дека бројот 1 е непосредно пред бројот n?

Решение. Просторот од елементарни настани се состои од сите можни распореди на n елементи, од каде $|\Omega| = P_n = n!$. За настанот A - бројот 1 е непосредно пред бројот n, имаме дека $|A| = P_{n-1} = (n-1)!$, затоа што распоредите кои одговараат на настанот може да ги сметаме како сите можни распореди од $n-1$ елемент т.е. ги распоредуваме броевите $2, ..., n-1$ и двојката $(1, n)$. Сега, според класичната дефиниција на веројатност имаме $P(A) = |A|/|\Omega| = (n-1)!/n! = 1/n$.

2.15. Во една кутија се наоѓаат 2 бели и 3 црни топчиња. Од кутијата на случаен начин се извлекуваат две топчиња

а) одеднаш,

б) едно по едно без враќање,

в) едно по едно со враќање.

Најди ја веројатноста дека извлечените топчиња се со различна боја.

Решение. Означуваме со настан A - извлечените топчиња се со различна боја.

а) При извлекување оддеднаш се добиваат комбинации, т.е. $|\Omega_1| = C_5^2 = 10$ и $|A| = C_2^1 \cdot C_3^1 = 6$, па затоа $P(A) = |A|/|\Omega_1| = 6/10 = 0,6$.

б) При извлекување едно по едно топче без враќање се добиваат варијации без повторување, т.е. $|\Omega_2| = V_5^2 = 20$ и $|A| = P_2(1,1) \cdot V_2^1 \cdot V_3^1 = 12$, па затоа $P(A) = |A|/|\Omega_2| = 12/20 = 0,6$.

в) При извлекување едно по едно топче со враќање се добиваат варијации со повторување, т.е. $|\Omega_3| = \overline{V}_5^2 = 25$ и $|A| = P_2(1,1) \cdot \overline{V}_2^1 \cdot \overline{V}_3^1 = 12$, па затоа $P(A) = |A|/|\Omega_3| = 12/25 = 0,48$.

2.16. Во една кутија се наоѓаат n бели и 1 црно топче. Од кутијата на случаен начин се извлекуваат m $(m < n)$ топчиња. Која е веројатноста дека меѓу извлечените топчиња се наоѓа црното топче?

Решение. Секое извлекување на m топчиња претставува една комбинација, па за множеството елементарни настани имаме $|\Omega| = C_{n+1}^m$. Означуваме со A - меѓу извлечените m топчиња се наоѓа црното топче, што значи дека A се реализира кога меѓу извлечените m топчиња има $m-1$ бело топче од n-те бели топчиња во кутијата, па затоа $|A| = C_n^{m-1}$. Тогаш,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_n^{m-1}}{C_{n+1}^m} = \frac{\binom{n}{m-1}}{\binom{n+1}{m}} = \frac{\binom{n+1}{m} - \binom{n}{m}}{\binom{n+1}{m}} = 1 - \frac{\frac{n!}{m!(n-m)!}}{\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}} = 1 - \frac{n-m+1}{n+1} = \frac{m}{n+1}.$$

2.17. Нека $x_k,\ k = 1, 2, ..., n$ се случајно избрани броеви од множеството $\{-1, 0, 1\}$. Најди ја веројатноста на настаните

а) A - производот $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)$ е различен од нула,

б) B - збирот $\sum_{k=1}^{n}(1 + x_k)$ е различна од нула.

Решение. Просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{-1, 0, 1\}\}$, од каде $|\Omega| = \overline{V}_3^n = 3^n$. За настаните A и B имаме

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{-1, 0, 1, \} \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \neq 0\} = \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{0, 1\}\}, \\ B &= \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{-1, 0, 1, \sum_{k=1}^{n}(1 + x_k) \neq 0\} = \\ &= \{(x_1, ..., x_n)|x_i \in \{-1, 0, 1\},\ (x_1, ..., x_n) \neq (-1, ..., -1)\}, \end{aligned}$$

од каде $|A| = \overline{V}_2^n = 2^n$ и $|B| = \overline{V}_3^n - 1 = 3^n - 1$. Па, бараните веројатности се

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ и } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3^n - 1}{3^n} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

2.18. Парадоксот на Мере. Покажи дека е поверојатно при едно фрлање на 4 коцки да се добие барем една единица, отколку при 24 фрлања на 2 коцки да се добијат барем еднаш две единици.

Решение. Првиот експеримент се состои во едно фрлање на 4 коцки, па множеството елементарни настани на овој експеримент е

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_i \in \{1, ..., 6\}, i = 1, 2, 3, 4\},$$

од каде $|\Omega_1| = \overline{V}_6^4 = 6^4$. Се бара веројатноста на настанот A - добиена е барем една единица. Спротивниот настан $\overline{A}$ - не е добиена ниедна единица, го запишуваме преку елемнтарните настани, па имаме

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_i \in \{2, ..., 6\}, i = 1, 2, 3, 4\},$$

од каде $|\overline{A}| = \overline{V}_5^4 = 5^4$. Конечно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,5177$.

За вториот експеримент, 24 фрлања на 2 коцки, множеството елементарни настани е

$$\Omega_2 = \{((x_1, y_1), ..., (x_{24}, y_{24}))|x_i, y_i \in \{1, ..., 6\}, i = 1, ..., 24\},$$

од каде $|\Omega_2| = (\overline{V}_6^2)^{24} = 36^{24}$. Се бара веројатноста на настанот B - добиени се барем еднаш две единици. Повторно го разгледуваме спротивниот настан $\overline{B}$ - не се добиени ниеднаш две единици, за кој имаме

$$B = \{((x_1, y_1), ..., (x_{24}, y_{24}))|x_i, y_i \in \{1, ..., 6\}, i = 1, ..., 24 \text{ и } (x_i, y_i) \neq (1, 1)\},$$

од каде $|\overline{B}| = (\overline{V}_6^2 - 1)^{24} = 35^{24}$. И конечно, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0,4914$.

Навистина $P(A) > P(B)$.

2.4 Геометриска веројатност

Аналогот на класичната дефиниција на веројатност во случај на непреброив простор од елемнтарни настани Ω е познат како **геометриска веројатност**. Најчестиот избор на веројатносна мера е должина на интервал кога $\Omega \subset \mathbb{R}$, плоштина на област кога $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, волумен на дел од просторот кога $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Односно, за $A \subseteq \Omega$ имаме

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

каде $m(\cdot)$ е избраната веројатносна мера.

2.19. На отсечката $\overline{AB} = 12cm$ случајно се фрла точка M. Најди ја веројатноста дека плоштината на квадратот со страна $\overline{AM}$ е меѓу $36cm^2$ и $81cm^2$.

Решение. Означуваме со $x = \overline{AM}$, тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = \{x|0 \leq x \leq 12\}$. Се бара веројатноста на настанот

$$A = \{x|0 \leq x \leq 12,\ 36 \leq x^2 \leq 81\} = \{x|6 \leq x \leq 9\}.$$

За веројатносна мера ја користиме должината на интервал, па имаме

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{9-6}{12-0} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

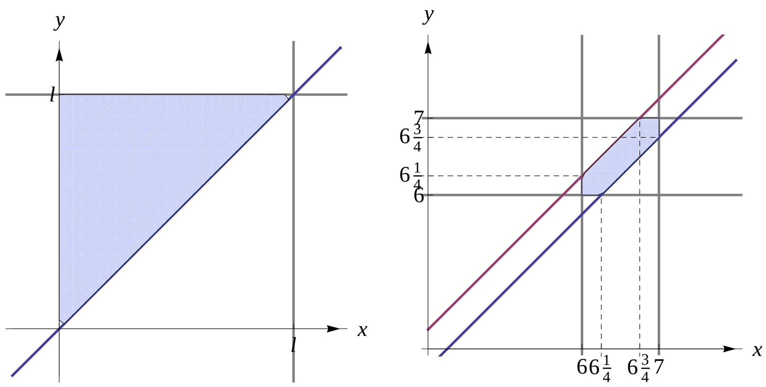
2.20. На отсечката $\overline{AB} = l$ случајно се фрлаат две точки M и N. Најди ја веројатноста дека точката M е поблиску до A, отколку точката N.

Решение. Означуваме со $x = \overline{AM}$ и $y = \overline{AN}$, тогаш просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(x,y)|0 \leq x, y \leq l\}$. Се бара веројатноста на настанот $A = \{(x,y)|0 \leq x < y \leq l\}$ (Цртеж 2.2 а)). За веројатносна мера ја користиме плоштината на областа, па имаме

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{l^2}{2}}{l^2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

2.21. Две лица се договориле да се сретнат на одредено место меѓу 6 и 7 часот. Секој од нив доаѓа на договореното место, чека 15 минути и ако не се сретне со другиот си заминува. Најди ја веројатноста дека тие се сретнале.

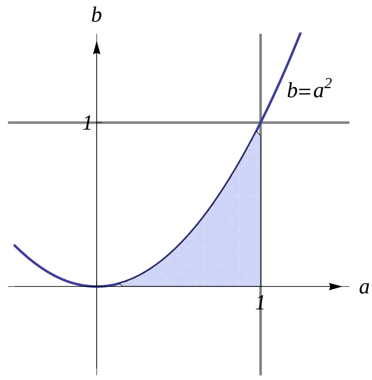
Решение. Означуваме со x - временскиот момент на пристигнување на првото лице, а со y - временскиот момент на пристигнување на второто лице. Тогаш, множеството од елементарни настани е $\Omega = \{(x,y)|6 \leq x, y \leq 7\}$, додека настанот B - лицата се сретнале е $B = \{(x,y)|6 \leq x, y \leq 7,\ |x-y| \leq 1/4\}$ (Цртеж 2.2 б)). Веројатносните мери на Ω и B се $m(\Omega) = (7-6)^2 = 1$ и $m(A) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 0,75 = 0,4375$. Па, според дефницијата на геометриска веројатност бараната веројатност е $P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = 0,4375$.



а) б)

Цртеж 2.2: Геометриски приказ на настаните A и B од задача 2.20 и задача 2.21

2.22. Коефициентите a и b од равенката $x^2 + 2ax + b = 0$ се случајно избрани броеви од интервалот $[0, 1]$. Најди ја веројатноста дека равенката има реални корени.



Цртеж 2.3: Геометриски приказ на настанот A од задача 2.22

Решение. Просторот елементарни настани е $\Omega = \{(a, b)|0 \leq a, b \leq 1\}$. За да равенката $x^2 + 2ax + b = 0$ има реални корени треба нејзината дискриминанта да е ненегативна т.е. $D = 4a^2 - 4b \geq 0$, па затоа настанот A - равенката има реални корени е

$$A = \{(a, b)|0 \leq a, b \leq 1,\ 4a^2 - 4b \geq 0\} = \{(a, b)|0 \leq a, b \leq 1,\ b \leq a^2\}$$

(види Цртеж 2.3). За веројатносните мери на Ω и A имаме $m(\Omega) = (1 - 0)^2 = 1$ и $m(A) = \int_0^1 a^2\, da = \frac{a^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. Според дефиницијата на геометриска веројатност имаме $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{3}$.

2.23. Во квадрат со темиња $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$ случајно се фрла точка M, која по паѓањето добива координати (ξ,η). Нека се дадени $0 \leq x,y,z \leq 1$, најди ги веројатностите

а) $P\{\xi \leq x,\ \eta \leq y\}$, б) $P\{\xi \cdot \eta \leq z\}$,

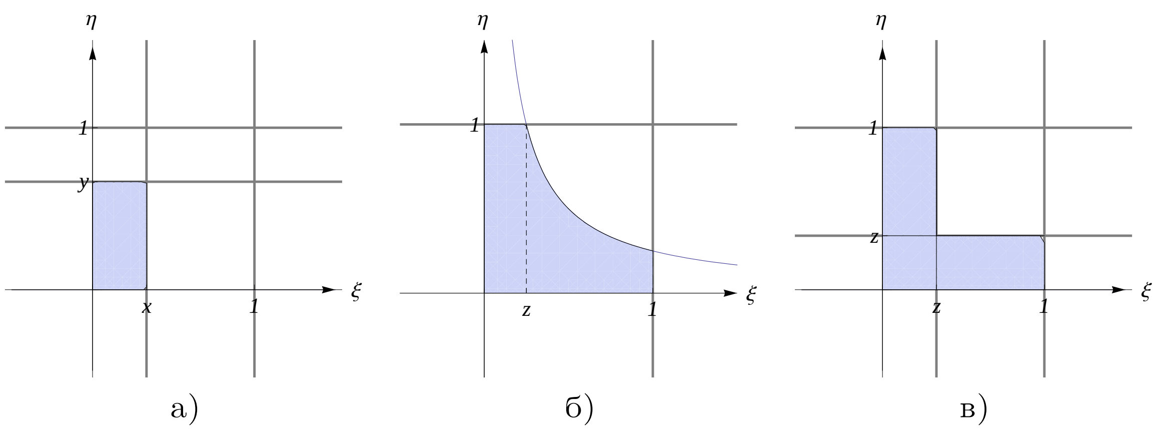
в) $P\{\min\{\xi,\eta\} \leq z\}$, г) $P\{\frac{1}{2}(\xi+\eta) \leq z\}$.

Решение. Просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(\xi,\eta)|0 \leq \xi,\eta \leq 1\}$, неговата веројатносна мера изнесува $m(\Omega)=1$. Да ги најдеме прво веројатностите на настаните $A = \{(\xi,\eta)|0 \leq \xi,\eta \leq 1,\ \xi \leq x,\ \eta \leq y\}$, $B = \{(\xi,\eta)|0 \leq \xi,\eta \leq 1,\ \xi \cdot \eta \leq z\}$ и $C = \{(\xi,\eta)|0 \leq \xi,\eta \leq 1,\ \min\{\xi,\eta\} \leq z\}$ (види Цртеж 2.4, а), б), в) соодветно). Па, веројатносните мери на секој од овие настани се

$$\begin{aligned}
m(A) &= xy,\\
m(B) &= \begin{cases} z\cdot 1 + \int_z^1 \frac{z}{\xi}\,d\xi & ,0 < z \leq 1 \\ 0 & ,z = 0 \end{cases} = \begin{cases} z(1-\ln z) & ,0 < z \leq 1 \\ 0 & ,z=0 \end{cases},\\
m(C) &= 1-(1-z)^2 = 2z - z^2.
\end{aligned}$$

Според геометриската дефиниција на веројатност имаме

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{m(A)}{m(\Omega)} = xy,\\
P(B) &= \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \begin{cases} z(1-\ln z) & ,0 < z \leq 1 \\ 0 & ,z = 0. \end{cases},\\
P(C) &= \frac{m(C)}{m(\Omega)} = 2z - z^2.
\end{aligned}$$



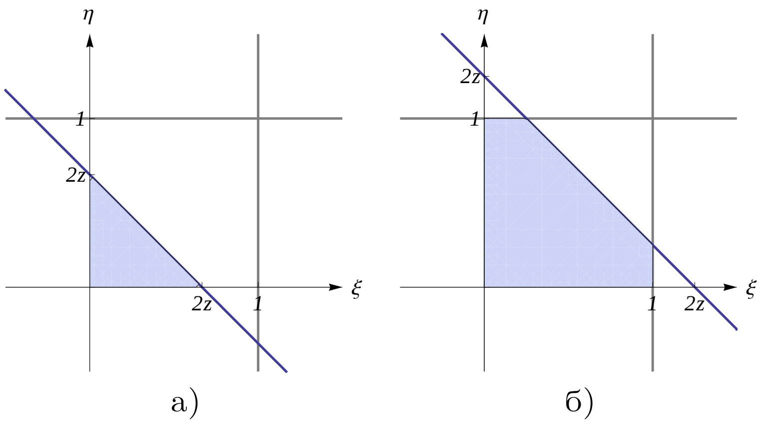
Цртеж 2.4: Геометриски приказ на настаните A, B, C од задача 2.23

Да го разгледаме сега настанот $D = \{(\xi,\eta)|0 \le \xi,\eta \le 1,\ \frac{1}{2}(\xi+\eta) \le z\}$, прикажан на Цртеж 2.5 а) за $0 \le z \le \frac{1}{2}$ и на Цртеж 2.5 б) за $\frac{1}{2} < z \le 1$. Веројатносната мера на настанот D е

$$m(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot(2z)^2 & ,0 \le z \le \frac{1}{2} \\ 1-\frac{1}{2}\cdot(2-2z)^2 & ,\frac{1}{2} < z \le 1 \end{cases} = \begin{cases} 2z^2 & ,0 \le z \le \frac{1}{2} \\ -2z^2+4z-1 & ,\frac{1}{2} < z \le 1 \end{cases}.$$

Според геометриската дефиниција на веројатност имаме

$$P(D) = \frac{m(D)}{m(\Omega)} = \begin{cases} 2z^2 & ,0 \le z \le \frac{1}{2} \\ -2z^2+4z-1 & ,\frac{1}{2} < z \le 1 \end{cases}.$$



Цртеж 2.5: Геометриски приказ на настанот D од задача 2.23

2.24. Во круг со радиус R случајно е фрлена една точка. Најди ја веројатноста дека таа точка паднала во рамностраниот триаголник впишан во кругот.

Решение. Просторот елементарни настани Ω се состои од сите точки во кругот K со радиус R, па затоа $m(\Omega) = \mathbf{P}(K) = R^2\pi$, каде со $\mathbf{P}(F)$ се означува плоштината на рамнинската фигура F. Означуваме со A - точката паднала во рамностраниот триаголник T впишан во кругот K, тогаш настанот A се состои од сите точки во триаголникот T и затоа $m(A) = \mathbf{P}(T) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Затоа, бараната веројатност е

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4R^2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,4135.$$

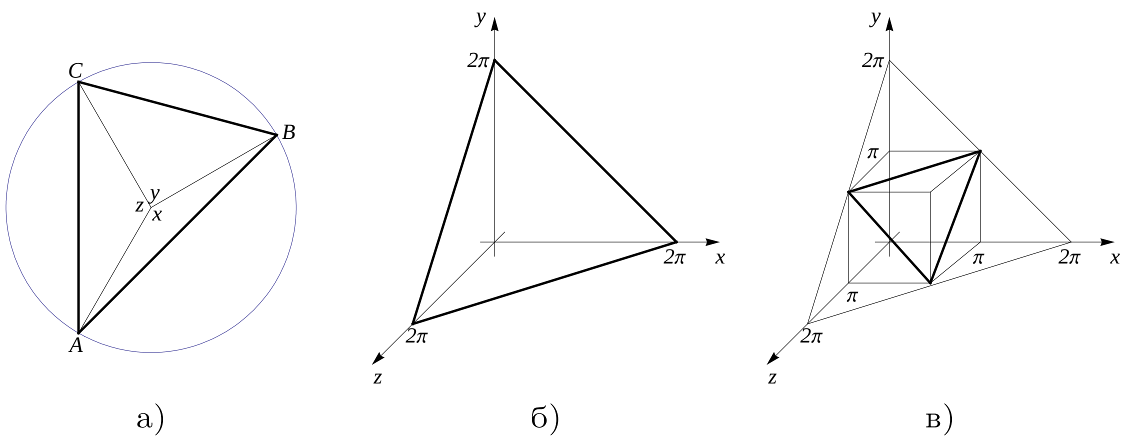
2.25. На кружница со радиус R случајно се фрлаат три точки A, B и C. Најди ја веројатноста дека триаголникот ABC е остроаголен.

Решение. Да ги означиме централните агли што ги образуваат точките A, B, C соодветно со x, y, z (Цртеж 2.6 а)). Тогаш, просторот од елементарни настани $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 2\pi,\ x+y+z = 2\pi\}$ претставува дел од рамнина (Цртеж 2.6 б)). Дефинираме настан A - триаголникот ABC е остроаголен. Настанот A се реализира кога сите централни агли x, y, z се помали од π т.е. $A = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq \pi,\ x + y + z = 2\pi\}$, што претставува пвторно дел од рамнина (Цртеж 2.6 в)).

Сега, за веројатносните мери на Ω и A имаме

$$m(\Omega) = \frac{(2\pi\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 2\pi^2\sqrt{3},\ m(A) = \frac{(\pi\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{2}.$$

И конечно, бараната веројатност е $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0,25$.



Цртеж 2.6: Геометриски прикази за задачата 2.25

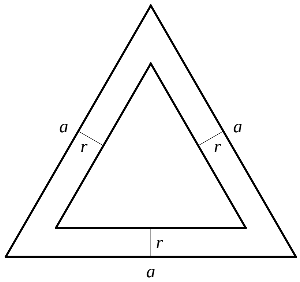
2.26. На паркет составен од правилни триаголници со страна a, случајно се фрла монета со радиус r. Најди ја веројатноста дека монетата не ја сече границата на ниеден од триаголниците.

Решение. Го означуваме со S центарот на монетата, па множеството од елементарни настани се состои од сите точки од рамностраниот триаголник T_1 со страна a, додека настанот A - монетата не ја сече границата на ниеден од триаголниците од кои е составен паркетот, се реализира кога центарот на монетата ќе падне во рамностраниот триаголник T_2 кој се наоѓа во триаголникот T_1, на растојание r од неговите страни (Цртеж 2.7). Значи, настанот се состои од сите точки од триаголникот T_2 со страна $a - 2r\sqrt{3}$. Бидејќи,

$$m(\Omega) = \mathbf{P}(T_1) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ m(A) = \mathbf{P}(T_2) = \frac{(a - 2r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4},$$

добиваме дека бараната веројатност е

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{(a - 2r\sqrt{3})^2}{a^2}.$$



Цртеж 2.7: Геометриски приказ за задачата 2.26

2.27. Која е веројатноста дека случајно избран реален број од интервалот $[0, 1]$ е рационален?

Решение. Множеството елементарни настани е $\Omega = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$, па $m(\Omega) = 1$. Се бара веројатноста на настанот $A = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 1\}$, од каде $m(A) = 0$, затоа што A е преброиво множество. И конечно, веројатноста да при случајно бирање на реални броеви од интервалот $[0, 1]$ да се избере рационален број е $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = 0$.

2.5 Задачи за самостојна работа

2.28. Од една кутија со $2n$ бели и $2m$ црни топчиња на случаен начин играчите A и B (по тој редослед) извлекуваат по едно топче

а) со враќање,

б) без враќање.

Нека A_i-игра от A во i-тото извлекување извлекол бело топче, $i = 2k - 1$, односно B_j-играчот B во j-тото извлекување извлекол бело топче, $j = 2k$, тогаш со помош на овие настани одреди го просторот од елементарни настани и опиши ги настаните:

C - играчот A прв извлекол бело топче,

D - извлечено е барем едно бело топче;

E - во $2n$ извлекувања едното бело топче е извлечено последно.

2.29. Докажи дека за произволни настани A и B важи

$$P(A\,B \cup \overline{A}\,\overline{B}) + P(\overline{A}\,B \cup A\,\overline{B}) = 1.$$

2.30. Нека A, B и C се произволни настани и нека истовремената реализација на настаните A и B, ја повлекува реализацијата на настанот C. Докажи дека

$$P(A) + P(B) - P(C) \leq 1.$$

2.31. Нека A, B и C се произволни настани. Докажи дека

$$P(A) \cdot P(B \setminus A) \cdot P(C \setminus (A \cup B)) \leq \frac{1}{27}.$$

2.32. Случајно се избира еден двоцифрен број. Најди ја веројатноста дека двоцифрениот број
а) е делив со барем еден од броевите 2 и 5,
б) има различни цифри,
в) има цифра на десетки за 1 поголема од цифра на единици,
г) има непарни цифри.

2.33. Најди ја веројатноста случајно избран 4-цифрен број формиран од цифрите 0, 1, 3, 5, 7, 8, да не е делив со 18 и сите цифри да му се различни.

2.34. Во едно претптијатие се вработени 100 луѓе. Од нив 40 знаат руски, 30 знаат англиски, а 15 ги знаат и двата јазика. Ако случајно се избира едно лице, која е веројатноста дека избраното лице
а) знае само руски,
б) знае барем еден јазик,
в) незнае ниеден јазик?
Ако случајно се избирааат две лица, која е веројатноста дека
г) двајцата знаат англиски,
д) еден знае англиски и руски, а другиот незнае ниеден јазик,
ѓ) најмалку еден од нив ги знае и двата јазика?

2.35. Во 30 папки се сместени 10 ракописи така што еден ракопис зафаќа 3 папки. Да се најде веројатноста дека во случајно избрани 6 папки ниеден ракопис не се наоѓа во целина.

2.36. Еден хор се состои од 10 хористи. Секој ден за време на еден триднее-вен концерт на случаен начин на сцената излегуваат по 6 хористи. Која е веројатноста секој ден да има различен состав на сцената?

2.37. На отсечката $\overline{AB} = l$ случајно се фрлаат две точки M и N. Најди ја веројатноста дека точката M е поблиску до N, отколку A до N.

2.38. На случаен начин се бираат два позитивни реални броја x и y кои не надминуваат 2. Најди јае веројатноста на настанот A - производот xy не надминува 1, а количникот $\frac{y}{x}$ не е поголем од 2.

2.39. Нека a, b, $(a > b)$ се должини на две страни на триаголник. Должината на третата страна се избира случајно од интервалот $(a-b, a+b)$. Која е веројатноста добиениот триаголник да е остроаголен?

2.40. Во квадрат со страна 1 фрлена е точка M. Најди ја веројатноста дека распојанието од M до дијагоналата на квадратот не е поголемо од a.

2.41. Рамнината е поделена со паралелни прави кои се една од друга на растојание $2a$. На рамнината случајно се фрла монета со радиус $r < a$. Најди ја веројатноста дека монетата не пресекува ниедна од правите.

Одговори

2.31 *Упатство:* Искористи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите $P(A)$, $P(B \setminus A)$, $P(C \setminus (A \cup B))$; **2.32** 0,6; 0,9; 0,1; 0,278; **2.33** 0,26296; **2.34** 0,25; 0,55; 0,45; 0,088; 0,136; 0,933; **2.35** 0,95; **2.36** 0,98576; **2.37** 0,75; **2.38** 0,3849; **2.39** $(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2-b^2})/(2b)$; **2.40** 1 за $a > \sqrt{2}/4$; $4\sqrt{2}a - 8a^2$ за $a \leq \sqrt{2}/4$; **2.41** $(a-r)/a$;

3

Условна веројатност. Независност

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност.

3.1 Условна веројатност

- Нека $A, B \in \mathcal{F}$ се произволни настани така што $P(B) > 0$. Тогаш, **условна веројатност на** A **при услов** B се дефинира со

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{3.1}$$

Друга ознака за условна веројатност (3.1) е $P(A|B)$.

- Од дефиницијата за условна веројатност (3.1), за веројатноста на производот AB имаме $P(AB) = P(B)P_B(A)$, равенство познато како **теорема за множење**. И за n произволни настани имаме дека важи аналогно тврдење, имено важи:

Теорема 3.1 (**Теорема за множење**). Нека $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ се произволни настани така што $P(A_1A_2...A_{n-1}) > 0$. Тогаш,

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}). \tag{3.2}$$

3.1. Докажи дека за произволни настани A и B важи равенството

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B).$$

Решение. Од дефинициата за условна веројатност и равенството $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$ имаме

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{P(AB)}{P(A)} = 1 - P_A(B).$$

3.2. Една коцка се фрла три пати. Најди ја веројатноста дека при првото фрлање на коцката е добиен бројот 5, ако во трите фрлања на коцката е добиен збир 14.

Решение. Означуваме со A - при првото фрлање на коцката добиен е бројот 5, и B - при трите фрлања на коцката добиен е збир 14. Се бара условната веројатност $P_B(A)$. Просторот од елементарни настани за овој експеримент е $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3)|x_1, x_2, x_3 \in \{1, ..., 6\}\}$, од каде $|\Omega| = \overline{V}_6^3 = 6^3 = 216$ додека настаните B и AB се $B = \{(x_1, x_2, x_3)|x_1, x_2, x_3 \in \{1, ..., 6\}, x_1 + x_2 + x_3 = 14\}$ и $AB = \{(5, x_2, x_3)|x_1, x_2, x_3 \in \{1, ..., 6\}, x_2 + x_3 = 9\}$. Со наоѓање на сите тројки од B и AB, се добива дека $|B| = 15$ и $|AB| = 4$, од каде $P(B) = \frac{15}{216}$ и $P(AB) = \frac{4}{216}$. И конечно, бараната веројатност е

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4}{15} \approx 0,2667.$$

3.3. Во една кутија се наоѓаат 8 бели и 10 црни топчиња. Два пати едно по друго се извлекува по едно топче без враќање. Најди ја веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели.

Решение. Означуваме со A_i - во i-тото извлекување извлечено е бело топче, $i = 1, 2$ и со B - извлечени се две бели топчиња. Тогаш, од теоремата за множење, бараната веројатност е

$$P(B) = P(A_1A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) = \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} \approx 0,183.$$

3.4. Еден студент треба да одговара на 25 прашања од кои знае 20. Тој случајно одбира 3 прашања. Која е веројатноста студентот да го положи испитот, ако испитот се смета за положен кога ќе бидат одговорени не помалку од две прашања?

Решение. Означуваме со A_i - студентот го знае i-тото одбрано прашање, $i = 1, 2, 3$ и со B - студентот го положил испитот. Тогаш, бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1A_2A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(A_1A_2\overline{A_3}) = \\ &= P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2)P_{\overline{A_1}A_2}(A_3) + \\ &\quad + P(A_1)P_{A_1}(\overline{A_2})P_{A_1\overline{A_2}}(A_3) + P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(\overline{A_3}) = \\ &= \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} + \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} \cdot \frac{19}{23} + \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{19}{23} + \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{5}{23} \approx 0,909. \end{aligned}$$

3.2 Тотална веројатност. Бајесови формули

- Нека $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ се произволни настани така што $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, и $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, односно настаните $A_1, A_2, ..., A_n$ се **разбивање на** Ω. Тогаш,

  ⋆ за секој $B \in \mathcal{F}$, според **теоремата за тотална веројатност** имаме дека
  $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B). \tag{3.3}$$

  ⋆ за секој $B \in \mathcal{F}$ за кој $P(B) > 0$, важат **Бејесовите формули**
  $$P_B(A_k) = \frac{P(A_k) P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)}, \; k = 1, 2, ..., n. \tag{3.4}$$

- Настаните A_i, $i = 1, 2, ..., n$ кои формираат разбивање на Ω се нарекуваат **хипотези**, нивните веројатности $P(A_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ се **априорни веројатности**, а веројатностите $P_B(A_k)$, $k = 1, 2, ..., n$ се **апостериорни веројатности**.

3.5. Во три кутии со ист надворешен изглед се сместени бели и црни топчиња така што во I кутија има 5 бели и 5 црни топчиња, во II кутија има 4 бели и 8 црни топчиња и во III кутија има 9 бели и 3 црни топчиња. Што е поверојатно, од II кутија да се извлече бело топче или да се извлече бело топче од случајно избрана кутија?

Решение. Означуваме со A_i - избрана е i-тата кутија, $i = 1, 2, 3$, A - од II кутија извлечено е бело топче и B - извлечено е бело топче. За веројатноста на настанот A имаме,

$$P(A) = P_{A_2}(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0,3333.$$

За веројатноста на настанот B, се користи формулата за тотална веројатност, при што за априорните веројатности имаме дека $P(A_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, па затоа,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{12} = \frac{19}{36} \approx 0,5278. \end{aligned}$$

Значи, поверојатно е да се извлече бело топче од произволно избрана кутија, отколку да се извлече бело топче од II кутија.

3.6. На студентите од еден факултет им е дозволено да повторуваат само една од I, II, III година. Веројатноста еден студент-повторувач да ја повторува I, II, III година е 0,25; 0,5; 0,25 соодветно. Веројатноста дека студентот кој ја повторува I година го завршува студирањето е 0,4, за студентот кој ја повторува II година е 0,5 и за студентот кој ја повторува III година е 0,9.

а) Најди ја веројатноста дека случајно избран студент-повторувач го завршува студирањето.

б) Ако е познато дека студентот-повторувач го завршил студирањето, најди ја веројатноста дека тој ја повторувал III година.

в) Ако студентот-повторувач го завршил студирањето, која година највероjатно тој ја повторувал?

Решение. Означуваме со A_i - студентот-повторувач ја повторува i-тата година, $i = 1, 2, 3$, A - студентот-повторувач го завршува студирањето. Од условот на задачата познати ни се следните веројатности $P(A_1) = 0,25$, $P(A_2) = 0,5$, $P(A_3) = 0,25$, $P_{A_1}(A) = 0,4$, $P_{A_2}(A) = 0,5$ и $P_{A_3}(A) = 0,9$.

а) Од формулата за тотална веројатност имаме,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P_{A_i}(A) = 0,25 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,9 = 0,575.$$

б) Од Бејесовите формули за бараната веројатност имаме,

$$P_A(A_3) = \frac{P(A_3)P_{A_3}(A)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P_{A_i}(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,9}{0,575} \approx 0,391.$$

в) Од Бејесовите формули ги допресметуваме $P_A(A_1) \approx 0,174$ и $P_A(A_2) \approx 0,435$. Значи, ако студентот-повторувач го завршил студирањето, највероjатно тој ја повторувал II година.

3.7. Во една фабрика 40% од вработените се мажи. Меѓу вработените жени 5% се со висока стручна подготовка (в.с.п.), а меѓу вработените мажи 10% се со в.с.п.

а) Која е веројатноста дека случајно избран вработен има в.с.п?

б) Случајно избран вработен има в.с.п. Која е веројатноста дека е жена?

Решение. Означуваме со A_1 - вработениот е жена, A_2 - вработениот е маж и A - вработениот има в.с.п. Тогаш, од условот на задачата познати ни се веројатностите $P(A_1) = 0,6$, $P(A_2) = 0,4$, $P_{A_1}(A) = 0,05$ и $P_{A_2}(A) = 0,1$.

а) Од формулата за тотална веројатност имаме,

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A) \cdot P(A_2)P_{A_2}(A) = 0,6 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,1 = 0,07.$$

б) Од Бејесовите формули имаме

$$P_A(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(A)}{P(A_1)P_{A_1}(A) \cdot P(A_2)P_{A_2}(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,05}{0,07} = \frac{0,03}{0,07} \approx 0,4286.$$

3.8. Еден владетел решил да го казни јасновидецот кој му предвидел неточни настани. Му дал две кутии и 4 топчиња, од кои 2 бели и 2 црни. Јасновидецот избира една кутија, а потоа од кутијата избира едно топче. Ако топчето е црно, тогаш тој ќе биде казнет, а ако топчето е бело, тој ќе биде помилуван. Како треба јасновидецот да ги размести топчињата во кутиите, за да си обезбеди максимална веројатност да биде помилуван?

Решение. Нека во првата кутија јасновидецот става m бели и n црни топчиња, тогаш во втората кутија тој става $2-m$ бели и $2-n$ црни топчиња. Означуваме со A_i - избрана е i-тата кутија, $i = 1,2$ и A - извлечено е бело топче. За веројатностите на настаните A_i, $i = 1,2$ имаме $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, па веројатноста јасновидецот да биде помилуван е

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}P(A) + P(A_2)P_{A_2}P(A) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{m}{m+n} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2-m}{(2-m)+(2-n)} = f(m,n).$$

Бидејќи $m, n \in \{0,1,2\}$ испитуваме поединечно.

За $m = 0$, имаме дека $f(m,n) = \frac{1}{4-n}$ и достигнува максимум за $n = 2$ кој изнесува $f(0,2) = \frac{1}{2}$.

За $m = 1$, имаме дека $f(m,n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3-n}$ и достигнува максимум за $n = 0$ или $n = 2$ кој изнесува $f(1,0) = f(1,2) = \frac{2}{3}$.

За $m = 2$, имаме дека $f(m,n) = \frac{1}{2+n}$ и достигнува максимум за $n = 0$ кој изнесува $f(2,0) = \frac{1}{2}$.

Значи, јасновидецот треба во едната кутија да стави 1 бело топче, а во другата кутија да стави 1 бело и 2 црни топчиња, за да обезбеди максимална веројатност од $P(A) = \frac{2}{3}$ да биде помилуван.

3.9. Во секоја од n-те кутии се сместени a бели и b црни топчиња. Од првата кутија се извлекува едно топче и се става во втората кутија, потоа од втората кутија се извлекува едно топче и се става во третата кутија и.т.н. од n-тата кутија се извлекува едно топче и се става во првата кутија. Најди ја веројатноста да по сите префрлања од првата кутија се извлече бело топче.

Решение. Означуваме со A_i - за време на префрлањата од i-тата кутија е извлечено бело топче, $i = 1,2,...,n$ и A - по сите префрлања од првата кутија е извлечено бело топче. Тогаш имаме,

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \tfrac{a}{a+b} \\
P(A_2) &= P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2) = \tfrac{a}{a+b}\cdot\tfrac{a+1}{a+b+1} + \tfrac{b}{a+b}\cdot\tfrac{a}{a+b+1} = \tfrac{a}{a+b} \\
&\vdots \\
P(A_n) &= P(A_{n-1})P_{A_{n-1}}(A_n) + P(\overline{A_{n-1}})P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) = \tfrac{a}{a+b}\cdot\tfrac{a+1}{a+b+1} + \tfrac{b}{a+b}\cdot\tfrac{a}{a+b+1} = \tfrac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

И конечно, бараната веројатност е

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1)P_{A_1}(A) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A) = \\
&= P(A_1)(P(A_n)P_{A_1A_n}(A) + P(\overline{A_n})P_{A_1\overline{A_n}}(A)) + \\
&\quad +P(\overline{A_1})(P(A_n)P_{\overline{A_1}A_n}(A) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_1}\,\overline{A_n}}(A)) = \\
&= \tfrac{a}{a+b}\cdot(\tfrac{a}{a+b}\cdot\tfrac{a}{a+b} + \tfrac{b}{a+b}\cdot\tfrac{a-1}{a+b}) + \tfrac{b}{a+b}\cdot(\tfrac{a}{a+b}\cdot\tfrac{a+1}{a+b} + \tfrac{b}{a+b}\cdot\tfrac{a}{a+b}) = \tfrac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

3.3 Независност на настани

- Настаните $A, B \in \mathcal{F}$ се **независни** ако $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Настаните $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ велиме дека се **независни (во целина)** ако за секое конечно множество од различни индекси $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ...\}$ имаме
$$P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k}).$$

3.10. Нека A и B се произволни настани. Докажи дека од равенството $P_{\overline{A}}(B) = P_A(B)$ следува независноста на настаните A и B.

Решение. Користејќи ги дефиницијата за условна веројатност и равенството $P(B) = P(AB) + P(A\overline{B})$, добиваме

$$P_{\overline{A}}(B) = P_A(B) \;\Rightarrow\; \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(AB)}{P(A)} \;\Rightarrow\; \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; P(A)P(B) - P(A)P(AB) = P(AB) - P(A)P(AB) \;\Rightarrow\; P(A)P(B) = P(AB),$$

односно настаните A и B се независни.

3.11. На маса се фрлаат две коцки. Дефинираме настани A - на првата коцка се појавил непарен број на точки, B - на втората коцка се појавил непарен број на точки и C - збирот на точки на двете коцки е непарен. Покажи дека настаните A, B и C се независни по парови, но не се независни во целина.

Решение. Множеството од елементарни настани е $\Omega = \{(x_1, x_2)|x_1, x_2 \in \{1, ..., 6\}\}$, од каде $|\Omega| = \overline{V}_6^2 = 6^2 = 36$. За настаните A, B и C имаме

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2)|x_1 \in \{1, 3, 5\},\ x_2 \in \{1, ..., 6\}\}, \\ B &= \{(x_1, x_2)|x_1 \in \{1, ..., 6\},\ x_2 \in \{1, 3, 5\}\}, \\ C &= \{(x_1, x_2)|x_1, x_2 \in \{1, ..., 6\},\ x_1 + x_2 \text{ е непарен}\}, \end{aligned}$$

од каде $|A| = 3\cdot 6 = 18$, $|B| = 6\cdot 3 = 18$, $|C| = 2\cdot 3\cdot 3 = 18$, па нивните веројатности се

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

За настаните AB, AC, BC и ABC имаме

$$\begin{aligned} AB &= \{(x_1, x_2)|x_1, x_2 \in \{1, 3, 5\}\}, \\ AC &= \{(x_1, x_2)|x_1 \in \{1, 3, 5\},\ x_2 \in \{2, 4, 6\}\}, \\ BC &= \{(x_1, x_2)|x_1 \in \{2, 4, 6\},\ x_2 \in \{1, 3, 5\}\}, \\ ABC &= \{(x_1, x_2)|x_1, x_2 \in \{1, 3, 5\},\ x_1 + x_2 \text{ е непарен}\} = \emptyset, \end{aligned}$$

од каде $|AB| = 3\cdot 3 = 9$, $|AC| = 3\cdot 3 = 9$, $|BC| = 3\cdot 3 = 9$ и $|ABC| = 0$. Сега, може да ја покажеме независноста по парови

$$\begin{aligned} P(AB) &= \frac{|AB|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)P(B), \\ P(AC) &= \frac{|AC|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)P(C), \\ P(BC) &= \frac{|BC|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(B)P(C). \end{aligned}$$

Но, настаните A, B и C не се независни во целина затоа што

$$P(ABC) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C).$$

3.12. Двајца стрелци независно еден од друг гаѓаат во иста цел. Веројатноста првиот од нив да ја погоди целта е 0,7, а веројатноста вториот од нив да ја погоди целта е 0,9. Одреди ја веројатноста дека целта е погодена барем еднаш.

Решение. Означуваме со A_i - i-тиот стрелец ја погодил целта, $i = 1, 2$. Од условот на задачата имаме $P(A_1) = 0,7$ и $P(A_2) = 0,9$ и при тоа настаните A_1 и A_2 се независни. Се бара веројатноста на настанот B - целта е погодена барем еднаш. Имаме,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,7 + 0,9 - 0,7\cdot 0,9 = 0,97. \end{aligned}$$

3.13. Во две кутии се сместени бели и црни топчиња, така што во I кутија има 1 бело и 9 црни топчиња, а во II кутија има 5 бели и 1 црно топче. Од секоја кутија се извлекува по едно топче, а топчињата што останале се префрлаат во III (празна) кутија.

а) Најди ја веројатноста дека од III кутија е извлечено бело топче.

б) Ако од III кутија е извлечено бело топче, најди ја веројатноста дека од II кутија е извлечено бело топче.

Решение. Означуваме со B_i - извлечено е бело топче од i-тата кутија, $i = 1, 2$ и A - од III кутија извлечено е бело топче. При тоа, настаните B_1 и B_2 се независни.

а) За барање на веројатноста на настанот A се користи формулата за тотална веројатност, при што априорните веројатности се

$$P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{60},\ P(B_1\overline{B_2}) = P(B_1)P(\overline{B_2}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60},$$

$$P(\overline{B_1}B_2) = P(\overline{B_1})P(B_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{45}{60},\ P(\overline{B_1}\ \overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{60},$$

додека апостериорните веројатности се

$$P_{B_1B_2}(A) = \frac{4}{14}, P_{B_1\overline{B_2}}(A) = \frac{5}{14}, P_{\overline{B_1}B_2}(A) = \frac{5}{14}, P_{\overline{B_1}\ \overline{B_2}}(A) = \frac{6}{14}.$$

Па, бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1B_2)P_{B_1B_2}(A) + P(B_1\overline{B_2})P_{B_1\overline{B_2}}(A) + \\ &\quad + P(\overline{B_1}B_2)P_{\overline{B_1}B_2}(A) + P(\overline{B_1}\ \overline{B_2})P_{\overline{B_1}\ \overline{B_2}}(A) = \\ &= \frac{5}{60} \cdot \frac{4}{14} + \frac{1}{60} \cdot \frac{5}{14} + \frac{55}{60} \cdot \frac{5}{14} + \frac{9}{60} \cdot \frac{6}{14} = \frac{304}{840} \approx 0,3619. \end{aligned}$$

б) Се бара условната веројатност

$$\begin{aligned} P_A(B_2) &= P_A(B_1B_2 + \overline{B_1}B_2) = P_A(B_1B_2) + P_A(\overline{B_1}B_2) = \\ &= \frac{P(B_1B_2)P_{B_1B_2}(A)}{P(A)} + \frac{P(\overline{B_1}B_2)P_{\overline{B_1}B_2}(A)}{P(A)} = \\ &= \frac{1}{P(A)}\Big(\frac{5}{60} \cdot \frac{4}{14} + \frac{45}{60} \cdot \frac{5}{14}\Big) \approx 0,8059. \end{aligned}$$

3.14. Најди ја веројатноста дека случајно избрана позитивна дропка $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ не може да се скрати.

Решение. Означуваме со A_k - бројот a е делив со k, B_k - бројот b е делив со k, C_k - дропката $\frac{a}{b}$ може да се скрати со k и D - дропката $\frac{a}{b}$ не може да се скрати.

Во однос на деливост со $k \in \mathbb{N}$, множеството природни броеви $\mathbb{N}$ е поделено на k класи (подмножества) со ист кардинален број, па затоа веројатноста случајно избран природен број да е делив со k е иста со веројатноста тој природен број да припаѓа на класата составена од броеви кои се деливи со k и таа веројатност е $\frac{1}{k}$. Па затоа, $P(A_k) = P(B_k) = \frac{1}{k}$.

Од независноста на настаните A_k и B_k, за фиксен k, имаме

$$P(C_k) = P(A_k B_k) = P(A_k)P(B_k) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2}.$$

Ако го означиме со q најголемиот прост број не поголем од a и b т.е. $q = \max\{p | p - \text{прост и } p \leq \min\{a, b\}\}$, тогаш за бараната веројатност имаме,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(\overline{C_2}\ \overline{C_3}\ \overline{C_5}\ \cdots\ \overline{C_q}) = P(\overline{C_2})P(\overline{C_3})P(\overline{C_5}) \cdots P(\overline{C_q}) = \\ &= (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{5^2}) \cdots (1 - \frac{1}{q^2}) = \prod_{p=2\ (p\text{-прост})}^{q} (1 - \frac{1}{p^2}). \end{aligned}$$

3.15. Двајца играчи M и N наизменично фрлаат коцка (така што прв почнува играчот M) се додека M не добие 3-ка или N не добие 2-ка или 6-ка. Најди ја веројатноста дека играчот M ќе биде последниот што ја фрлил коцката.

Решение. Означуваме со A_i - играчот M добил 3-ка во i-тото фрлање, $i = 2k-1$, $k = 1, 2, ...$, B_j - играчот N добил 2-ка или 6-ка во j-тото фрлање, $j = 2k$, $k = 1, 2, ...$, и C - играчот M е последниот што ја фрлил коцката. Тогаш, имаме дека $P(A_i) = \frac{1}{6}$, $P(B_j) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, каде A_i, B_j се независни во целина. За бараната веројатност имаме

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 + \overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3 + \overline{A_1}\ \overline{B_2}\ \overline{A_3}\ \overline{B_4}\ A_5 + \dots) = \\ &= P(A_1) + P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3) + P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ \overline{A_3}\ \overline{B_4}\ A_5) + \dots \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{8} = 0,375. \end{aligned}$$

3.16. Monty Hall dillemma. Една наградна игра се состои во тоа што натпреварувачот одбира една од три врати, од кои едната крие нов автомобил, а останатите две по една коза. Откако тој ќе го направи изборот, водителот отвара една од неизбраните врати позади која со сигурност не е автомобилот и му дава можност на натпреварувачот да го смени својот претходен избор т.е. да посочи нова врата.

а) Кога шансите на натпреварувачот за добивање на автомобилот му се поголеми, кога ќе го задржи својот претходен избор или кога ќе посочи нова врата?

б) Натпреварувачот фрла монета и ако се падне "грб", тој посочува нова врата, а ако се падне "пара", тој го задржува својот претходен избор. Ако на крајот натпреварувачот го добил автомобилот, која е веројатноста дека тој посочил нова врата?

в) Натпреварувачот игра независно два пати, така што првиот пат не го менува изборот, а вториот пат посочува нова врата. Која е веројатноста тој да добие два автомобила?

Решение. а) Означуваме со H_i - натпреварувачот за прв пат ја одбира i-тата врата, $i = 1, 2, 3$. Имаме дека $P(H_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Без губење на општоста, нека автомобилот се наоѓа позади првата врата. Да означиме со A - натпреварувачот го добива автомобилот без да го промени својот избор и B - натпреварувачот го добива автомобилот со менување на првобитниот избор. Тогаш,

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3},$$

$$P(B) = P(H_1)P_{H_1}(B) + P(H_2)P_{H_2}(B) + P(H_3)P_{H_3}(B) = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Значи, ако натпреварувачот посочи нова врата, поголеми се шансите да го добие автомобилот.

б) Означуваме со A_1 - на монетата се паднал "грб", A_2 - на монетата се паднала "пара", C - натпреварувачот го добива автомобилот. Да забележиме дека $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, $P_{A_1}(C) = P(B) = \frac{2}{3}$, $P_{A_2}(C) = P(A) = \frac{1}{3}$, каде A и B се настаните дефинирани под а). Се бара условната веројатност

$$P_C(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(C)}{P(A_1)P_{A_1}(C) + P(A_2)P_{A_2}(C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

в) Означуваме со D - во две независни игри, но така што првиот пат не го менува изборот, а вториот пат посочува нова врата, натпреварувачот добива два автомобила. Тогаш, $D = AB$, каде A и B се настаните дефинирани под а), и од независноста на игрите, за бараната веројатност имаме,

$$P(D) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

3.17. По завршените четвртфинални натпревари останале во игра екипите X, Y, Z и T. Во табелата дадени се шансите за победа во било која средба на било кои две од екипите, така на било кој натпревар меѓу екипите X и Y, шансите се 60:40 за екипата X, т.е. веројатноста екипата X да ја елиминира екипата Y е 0,6, а веројатноста екипата Y да ја елиминира екипата X е 0,4.

$X:Y$	$X:Z$	$X:T$	$Y:Z$	$Y:T$	$Z:T$
60:40	80:20	70:30	48:52	42:58	45:55

а) Со која веројатност екипата Z го освојува купот, ако паровите за полуфинале се уште не се одредени?

б) Со која веројатност екипата Z го освојува купот, ако е познато дека во полуфиналето таа игра со екипата T?

Решение. а) Означуваме со H_1 - во полуфиналето екипата Z игра со екипата X, H_2 - во полуфиналето екипата Z игра со екипата Y и H_3 - во полуфиналето екипата Z игра со екипата T. Бидејќи паровите за полуфинале се одредуваат со ждрепка, имаме дека $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Означуваме со M - екипата Z го освојува купот. Тогаш,

$$P(M) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P_{H_i}(M) = \frac{1}{3}(P_{H_1}(M) + P_{H_2}(M) + P_{H_3}(M)).$$

За пресметување на условните веројатности $P_{H_i}(M)$, $i = 1, 2, 3$, важно е во финалето со кого ќе продолжи да игра екипата Z. Означуваме со Q_1 - во полуфиналето меѓу Z и X победува Z, Q_2 - во полуфиналето меѓу Y и T победува Y. Тогаш, од независноста на Q_1 и Q_2, имаме

$$\begin{aligned} P_{H_1}(M) &= P(Q_1)P(Q_2)P_{Q_1Q_2}(M) + P(Q_1)P(\overline{Q_2})P_{Q_1\overline{Q_2}}(M) = \\ &= 0,2 \cdot 0,42 \cdot 0,52 + 0,2 \cdot 0,58 \cdot 0,45 = 0,09588. \end{aligned}$$

На сличен начин се добива дека $P_{H_2}(M) = 0,143$ и $P_{H_3}(M) = 0,1476$, па бараната веројатност е

$$P(M) = \frac{1}{3}(0,09588 + 0,143 + 0,1476) \approx 0,128827.$$

б) Бараната веројатност е $P_{H_3}(M) = 0,1476$.

Забелешка. Бидејќи од сите условни веројатности $P_{H_i}(M)$, $i = 1, 2, 3$, најголема е $P_{H_3}(M)$, значи дека екипата Z има најголеми шанси да го освои купот, ако во полуфиналето игра со екипата T, додека најголеми шанси екипата Z да заигра во финалето е ако во полуфиналето игра со екипата Y (од $Y : Z = 48 : 52$).

3.4 Независни испитувања

- **Бернулиева шема.** Нека еден експеримент се изведува независно n пати, велиме дека се направени n **независни испитувања**. При секое испитување се разгледува еден ист настан A чија веројатност за реализација е $p = P(A)$. Означуваме со B_k - настанот A се реализирал точно k пати при n-те независни испитувања, $k = 0, 1, ..., n$. Тогаш, веројатноста на овие настани е

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n.$$

- **Полиномиална шема.** Нека при секое од n-те независни испитувања се разгледуваат настаните A_i, $i = 1, 2, ..., r$ кои формираат разбивање на Ω, чии веројатности за реализација се $p_i = P(A_i)$, $i = 1, 2, ..., r$ $(p_1 + ... + p_r = 1)$. Означуваме со $B_{k_1,...,k_r}$ - настанот A_i се реализирал точно k_i пати при n-те независни испитувања, $0 \leq k_i \leq n$, $k_1 + ... + k_r = n$. Тогаш, веројатноста на овие настани е

$$P(B_{k_1,...,k_r}) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r},\ 0 \leq k_i \leq n,\ k_1 + ... + k_r = n.$$

  Забележуваме дека, Бернулиевата шема е специјален случај на Полиномиалната шема за $r = 2$.

- **Поасонова шема.** При секое од n-те независни испитувања се разгледува појавувањето на еден ист настан A. Нека веројатноста за реализација на настанот A во i-тото испитување е p_i, $i = 1, 2, ..., n$. Означуваме со $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш, за веројатностите на настаните B_k - настанот A се реализирал точно k пати при n-те независни испитувања, $k = 0, 1, ..., n$ имаме

$$\begin{aligned} P(B_0) &= q_1 q_2 \cdots q_n, \\ P(B_1) &= p_1 q_2 \cdots q_n + q_1 p_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 q_2 \cdots p_n, \\ &\vdots \\ P(B_n) &= p_1 p_2 \cdots p_n. \end{aligned}$$

  Се воочува дека веројатноста $P(B_k)$ е еднаква на коефициентот пред x^k во развојот на полиномот

$$R(x) = \prod_{i=1}^{n} (p_i x + q_i)$$

  по степените на x. Јасно е дека Поасоновата шема за $p_i = p$, $i = 1, 2, ..., n$ преминува во Бернулиева шема.

3.18. Која е веројатноста дека при 8 фрлања на хомогена коцка, единица се појавила три пати?

Решение. Едно фрлање на хомогената коцка ќе го сметаме за едно независно испитување. Се добива Бернулиева шема со $n = 8$, во која се разгледува реализација на настанот A - се појавила единица, чија веројатност е $p = P(A) = \frac{1}{6}$. Се бара веројатноста на настанот B_3 - при 8-те фрлања единица се појавила три пати,

$$P(B_3) = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,1042.$$

3.19. Колкава е веројатноста дека во три последователни фрлања на две коцки, барем еднаш на двете ќе се добие парен број на точки?

Решение. Едно фрлање на двете коцки се смета за едно независно испитување, па се добива Бернулиева шема со $n = 3$, во која се разгледува реализација на настанот A - на двете коцки се појавиле парен број на точки, чија веројатност е $p = P(A)$. За наоѓање на веројатноста p, ги разгледуваме настаните A_i - при едно фрлање на i-тата коцка се појавил парен број на точки, $i = 1, 2$. Од $P(A_1) = P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ и од независноста на A_1 и A_2 имаме

$$p = P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Понатаму, се бара веројатноста на настанот $B_{k\geq 1}$ - во три фрлања на две коцки, барем еднаш на двете се добива парен број на точки,

$$P(B_{k\geq 1}) = 1 - P(B_0) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3 \approx 0,578.$$

3.20. Веројатноста еден стрелец при едно гаѓање да ја погоди целта е 0,3. Колку најмалку пати треба да гаѓа за да со веројатност не помала од 0,95 биде убеден дека ќе ја погоди целта барем еднаш?

Решение. Едно гаѓање на стрелецот се смета за едно независно испитување. Се бара бројот n на независни испитувања во Бернулиевата шема, во која се разгледува реализација на настанот A - стрелецот ја погодува целта, чија веројатност според условот на задачата е $p = P(A) = 0,3$. Дадено е дека веројатноста на настанот $B_{k\geq 1}$, не е помала од 0,95 т.е.

$$P(B_{k\geq 1}) \geq 0,95 \;\Leftrightarrow\; 1 - P(B_0) \geq 0,95 \;\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0}(0,3)^0(0,7)^n \geq 0,95 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (0,7)^n \leq 0,05 \;\Leftrightarrow\; n\ln 0,7 \leq \ln 0,05 \;\Leftrightarrow\; n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,7} \approx 8,399.$$

Значи, стрелецот треба да гаѓа најмалку 9 пати за да со веројатност не помала од 0,95 биде убеден дека ќе ја погоди целта барем еднаш.

3.21. Во круг е впишан квадрат. Најди ја веројатноста дека од 10 случајно фрлени точки во кругот, 4 ќе паднат во квадратот, 3 во еден од сегментите и по една точка во останатите три сегмента.

Решение. Едно фрлање на една точка е едно независно испитување, значи бројот на независни испитувања е $n = 10$. Означуваме со A_0 - точката паднала во квадратот, A_i - точката паднала во i-тиот сегмент, $i = 1, 2, 3, 4$.

Се разгледува Полиномиална шема за $n = 10$, во која се разгледува реализација на настаните A_0, A_1, A_2, A_3 и A_4, за кои имаме дека $P(A_0) = \frac{2}{\pi}$, $P(A_i) = \frac{1}{4}(1 - \frac{2}{\pi}) = \frac{\pi-2}{4\pi}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогаш, веројатноста на настанот C - од 10 фрлени точки во кругот, 4 падналe во квадратот, 3 во еден од сегментите и по една точка во останатите три сегмента е

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_{4,3,1,1,1}) + P(B_{4,1,3,1,1}) + P(B_{4,1,1,3,1}) + P(B_{4,1,1,1,3}) = \\ &= 4 \cdot \frac{10!}{4!3!1!1!1!} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \left(\frac{\pi-2}{4\pi}\right)^{3+1+1+1} \approx 0,0093. \end{aligned}$$

3.22. Човек од определена група на луѓе, со веројатност 0,2 има кафеава коса, со веројатност 0,3 има црна коса, со веројатност 0,4 има руса коса и со веројатност 0,1 има црвена коса. Од истата група на произволен начин се одбрани 6 луѓе. Најди ја веројатноста на настаните

A - во одбраните луѓе има не помалку од четворица со руса коса,

B - во одбраните луѓе има барем еден со црвена коса,

C - во одбраните луѓе има еднаков број луѓе со руса и црна коса.

Решение. Изборот на еден човек е едно независно испитување, значи бројот на независни испитувања е $n = 6$. Означуваме со A_1 - човекот има кафеава коса, A_2 - човекот има црна коса, A_3 - човекот има руса коса, A_4 - човекот има црвена коса. Тогаш, од условот на задачата имаме $P(A_1) = 0,2$, $P(A_2) = 0,3$, $P(A_3) = 0,4$, $P(A_4) = 0,1$.

За пресметување на веројатноста на настанот A, разгледуваме Бернулиева шема за $n = 6$, во која се разгледува реализација на настанот A_3. Па, бараната веројатност е

$$P(A) = P(B_{k\geq 4}) = \binom{6}{4}(0,4)^4(0,6)^2 + \binom{6}{5}(0,4)^5(0,6)^1 + \binom{6}{6}(0,4)^6(0,6)^0 = 0,1792.$$

За пресметување на веројатноста на настанот B, разгледуваме Бернулиева шема за $n = 6$, во која се разгледува реализација на настанот A_4. Па, бараната веројатност е

$$P(B) = P(B_{k\geq 1}) = 1 - P(B_0) = 1 - \binom{6}{0}(0,1)^0(0,9)^6 = 0,468559.$$

За пресметување на веројатноста на настанот C, разгледуваме Полиномиална шема за $n = 6$, во која се разгледува реализација на настаните A_3, A_2 и $A_1 \cup A_4$. Тогаш, бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_{0,0,6}) + P(B_{1,1,4}) + P(B_{2,2,2}) + P(B_{3,3,0}) = \\ &= \frac{6!}{0!0!6!} \cdot (0,3)^0(0,4)^0(0,3)^6 + \frac{6!}{1!1!4!} \cdot (0,3)^1(0,4)^1(0,3)^4 + \\ &\quad + \frac{6!}{2!2!2!} \cdot (0,3)^2(0,4)^2(0,3)^2 + \frac{6!}{3!3!0!} \cdot (0,3)^3(0,4)^3(0,3)^0 = 0,181089. \end{aligned}$$

3.23. Во една кутија има 2 бели и 3 црни топчиња. Се изведуваат 5 извлекувања на по едно топче со враќање. По секое непарно извлекување во кутијата се додава по едно бело топче, а по секое парно извлекуваще по едно црно топче. Што е поверојатно, во третото извлекување да се извлече бело топче или бело топче да биде извлечено три пати?

Решение. При секое од 5-те извлекувања се разгледува реализација на настанот A - извлечено е бело топче, чија веројатност во првото извлекување е $p_1 = \frac{2}{5}$, во второто $p_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, во третото $p_3 = \frac{3}{7}$, во четвртото $p_4 = \frac{4}{8}$ и во петтото $p_5 = \frac{4}{9}$. Всушност се формира Поасонова шема со $n = 5$ и веројатности p_i, $i = 1, ..., 5$. Се бара да се споредат веројатностите на настаните B - во третото извлекување извлечено е бело топче и C - бело топче е извлечено три пати при 5-те извлекувања. Од погоре изнесеното, имаме дека $P(B) = p_3 = \frac{3}{7} \approx 0,42857$. Додека, според Поасоновата шема, веројатноста на настанот C е коефициентот пред x^3 во развојот по степените на x на полиномот

$$R(x) = \prod_{i=1}^{5}(p_i x + q_i) = \frac{1}{1260}(24x^5 + 146x^4 + 353x^3 + 424x^2 + 253x + 60),$$

односно $P(C) = \frac{353}{1260} \approx 0,28016$.

Значи, поверојатно е во третото извлекување да се извлече бело топче отколку бело топче да биде извлечено три пати.

3.5 Гранични теореми во Бернулиевата шема

Разгледуваме Бернулиева шема со параметри n (број на независни испитувања) и p (веројатност на настанот A при секое од n-те независни испитувања). Кога бројот n на независни испитувања е голем, отежнато е пресметувањето на веројатностите на настаните B_k (настанот A се реализирал точно k пати при n-те независни испитувања), $k = 0, 1, ..., n$. Во тој случај се користат приближни формули дефинирани со следните теореми.

- **Теорема на Поасон.** Ако веројатноста p_n на настанот A во n-тото испитување зависи од n тогаш, кога $p_n \to 0$, $np_n \to a$ и $n \to \infty$ важи следната апроксимација за веројатноста на настанот B_k,

$$P(B_k) \to \frac{a^k}{k!}e^{-a},\ n \to \infty\ (k = 0, 1, 2, ...)$$

Оваа апроксимација дава добри приближувања кога настанот A е редок настан т.е. кога $n \geq 100$ и $a < 10$. Во овој случај за апроксимација за веројатноста на настанот $B_{k_1 \leq k \leq k_2}$ се користи

$$P(B_{k_1 \leq k \leq k_2}) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$

- **Локална теорема на Моавр-Лаплас.** Кога $a = np \geq 10$, тогаш за веројатноста на настанот B_k се користи следната апроксимација

$$P(B_k) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\ \Phi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big),\ n \to \infty\ (k = 0, 1, 2, ...)$$

каде $q = 1 - p$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$ и $\alpha(x) \sim \beta(x)$ означува дека $\alpha(x)/\beta(x) \to 1$, кога $x \to x_0$.

- **Интегрална теорема на Моавр-Лаплас.** Кога $a = np \geq 10$, тогаш за веројатноста на настанот $B_{k_1 \leq k \leq k_2}$ се користи следната апроксимација

$$P(B_{k_1 \leq k \leq k_2}) \approx \Phi_0(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi_0(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}),$$

каде $q = 1 - p$ и $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du$, $-\infty < x < \infty$ е Лапласовиот интеграл. При практична примена на оваа апроксимација се користи нејзиното подобрување

$$P(B_{k_1 \leq k \leq k_2}) \approx \Phi_0(\frac{k_2 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi_0(\frac{k_1 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}).$$

- При пресметувањето на горе наведените приближни вредности може да се користат следните таблици (Прилог А) со вредности на функциите:

  - ⋆ $y = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$, $a < 10$ (Таблица 1)
  - ⋆ $y = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!}e^{-a}$, $a < 10$ (Таблица 2)
  - ⋆ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $x > 0$ (Таблица 3)
  - ⋆ $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du$, $x > 0$ (Таблица 4)

3.24. Веројатноста дека еден телевизор ќе биде произведен со дефект изнесува 0,002. Колкава е веројатноста дека од случајно избрани 500 телевизори ќе има

а) точно два телевизора со дефект,

б) барем еден телевизор со дефект,

в) повеќе од еден, а помалку од пет телевизора со дефект?

Решение. Изборот на еден телевизор е еден експеримент кој се повторува независно. Па, разгледуваме Бернулиева шема со $n = 500$, каде се разгледува реализација на настанот A - телевизорот е произведен со дефект, чија веројатност е $p = P(A) = 0,002$. Бидејќи $n = 500 \geq 100$ и $a = np = 1 < 10$, за приближно пресметување на бараните веројатности ја користиме теоремата на Поасон, при што приближните вредности ги читаме од Таблица 1 (за а) и б)), односно Таблица 2 (за в)).

а) $P(B_2) \approx \frac{1^2}{2!}e^{-1} = 0,183940$,

б) $P(B_{k\geq 1}) = 1 - P(B_0) \approx 1 - \frac{1^0}{0!}e^{-1} = 1 - 0,367879 = 0,632121$,

в) $P(B_{1<k<5}) = P(B_{2\leq k\leq 4}) \approx \sum_{k=2}^{4} \frac{1^k}{k!}e^{-1} = \sum_{k=0}^{4} \frac{1^k}{k!}e^{-1} - \sum_{k=0}^{1} \frac{1^k}{k!}e^{-1} = 0,996340 - 0,735759 = 0,260581$.

3.25. Колку пати со веројатност 0,0484 може да се очекува појавување на настанот A во серија од 100 независни испитувања, ако веројатноста за успех при секое испитување е 0,5?

Решение. Дадена е Бернулиева шема со $n = 100$ и $p = P(A) = 0,5$. Се бара k, $(0 \leq k \leq 100)$ за кој имаме дека $P(B_k) = 0,0484$. Бидејќи $a = np = 50 \geq 10$, теоремата на Поасон нема да даде добро приближување на веројатноста $P(B_k)$, па затоа ја користиме локалната теорема на Моавр-Лаплас, според која

$$P(B_k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\Phi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}}\,\Phi\Big(\frac{k-100\cdot 0,5}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}}\Big) = \frac{1}{5}\,\Phi\Big(\frac{k-50}{5}\Big),$$

каде вредностите на функцијата $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ се читаат од Таблица 3. Бараме k такво да

$$\frac{1}{5}\,\Phi\Big(\frac{k-50}{5}\Big) = 0,0484 \text{ т.е. } \Phi\Big(\frac{k-50}{5}\Big) = 0,242.$$

Од Таблица 3 имаме дека $\Phi(1) = 0,242$, и бидејќи $\Phi(x)$ е парна функција заклучуваме дека $\frac{k-50}{5} = 1$ или $\frac{k-50}{5} = -1$, односно $k = 55$ или $k = 45$.

3.26. Една група од 200 стрелци изведува гаѓање во мета така што секој стрелец гаѓа по еднаш во метата и ја погодува истата со веројатност 0,8. Определи ја веројатноста дека ќе бидат постигнати

а) барем 120 погодоци,
б) најмногу 160 погодоци,
в) повеќе од 150, а помалку од 190 погодоци.

Решение. Едно гаѓање на еден стрелец е едно независно испитување. Се разгледува Бернулиева шема со $n = 200$ и $p = P(A) = 0,8$, каде A - целта е погодена при едно гаѓање. Тогаш, од интегралната теорема на Моавр-Лаплас имаме,

а) $P(B_{k\geq 120}) = P(B_{120\leq k\leq 200}) \approx \Phi_0(\frac{200+\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}}) - \Phi_0(\frac{120-\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}})$,
каде вредностите на функцијата $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}du$ се читаат од Таблица 4. Од непарноста на функцијата $\Phi_0(x)$ и тоа дека $\Phi_0(x) \approx 0,5$ за $x \geq 5$, имаме $P(B_{k\geq 120}) \approx \Phi_0(7,16) - \Phi_0(-7,16) = \Phi_0(7,16) + \Phi_0(7,16) = 0,5 + 0,5 = 1$.

б) $P(B_{k\leq 160}) = P(B_{0\leq k\leq 160}) \approx \Phi_0(\frac{160+\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}}) - \Phi_0(\frac{0-\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}}) = \Phi_0(0,09) - \Phi_0(-28,37) = \Phi_0(0,09) + \Phi_0(28,37) = 0,03586 + 0,5 = 0,53586$.

в) $P(B_{150<k<190}) = P(B_{151\leq k\leq 189}) \approx \Phi_0(\frac{189+\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}}) - \Phi_0(\frac{151-\frac{1}{2}-200\cdot 0,8}{\sqrt{200\cdot 0,8\cdot 0,2}}) = \Phi_0(5,21) - \Phi_0(-1,68) = \Phi_0(5,21) + \Phi_0(1,68) = 0,5 + 0,45352 = 0,95352$.

3.27. Колку независни испитувања треба да се направат за да веројатноста настанот A да се појави повеќе од 5 пати изнесува 0,8? Веројатноста за успех во секое од независните испитувања е 0,05.

Решение. Разгледуваме Бернулиева шема со број на независни испитувања n кој треба да се одреди за да $P(B_{k>5}) = 0,8$, при што веројатноста на настанот A кој се разгледува при секое од испитувањата е $p = P(A) = 0,05$. Со користење на интергралната теорема на Моавр-Лаплас добиваме

$$0,8 = P(B_{k>5}) = P(B_{6\leq k\leq n}) \approx \Phi_0(\frac{n+\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}}) - \Phi_0(\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}}).$$

Бидејќи,

$$\frac{n+\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}} = \frac{0,95\sqrt{n}}{\sqrt{0,0475}} + \frac{1}{2\sqrt{0,0475n}} \geq 4,36\sqrt{n} > 9,75 > 5,$$

имаме дека $\Phi_0(\frac{n+\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}}) \approx 0,5$. Затоа, $0,8 \approx 0,5 - \Phi_0(\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}})$, од каде $\Phi_0(\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}}) \approx -0,3$, односно $\Phi_0(-\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}}) \approx 0,3$, заради непарноста на функцијата $\Phi_0(x)$. Од Таблица 4 наоѓаме дека $\Phi_0(0,84) = 0,29955$ и $\Phi_0(0,85) = 0,30234$, и затоа ставаме

$$-\frac{6-\frac{1}{2}-n\cdot 0,05}{\sqrt{n\cdot 0,05\cdot 0,95}} = 0,845,$$

од каде со решавање на последната равенка по n добиваме дека $n = 156$.

3.28. Веројатноста за реализирање на настанот A во секое од 625-те независни испитувања е 0,8. Најди ја веројатноста дека релативната честота за реализирање на настанот A се отклонува од неговата веројатност по апсолутна вредност не повеќе од 0,04.

Решение. Разгледуваме Бернулиева шема со $n = 625$ и $p = P(A) = 0,8$. Ако настанот A се реализирал точно k пати при n испитувања, тогаш количникот $\frac{k}{n}$ ја претставува релативната честота на настанот A. За $\varepsilon > 0$ имаме,

$$|\frac{k}{n} - p| \leq \varepsilon \ \Leftrightarrow \ |k - np| \leq n\varepsilon \ \Leftrightarrow \ -n\varepsilon + np \leq k \leq n\varepsilon + np,$$

па затоа

$$P(B_{|\frac{k}{n}-p|\leq\varepsilon}) = P(B_{-n\varepsilon+np\leq k\leq n\varepsilon+np}) \approx \Phi_0(\frac{n\varepsilon+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}) - \Phi_0(\frac{-n\varepsilon-\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}) = 2\Phi_0(\frac{n\varepsilon+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}).$$

Тогаш, за бараната веројатност имаме

$$P(B_{|\frac{k}{625}-0,8|\leq 0,04}) \approx 2\Phi_0(\frac{625\cdot 0,04+\frac{1}{2}}{\sqrt{625\cdot 0,8\cdot 0,2}}) = 2\Phi_0(2,55) = 2\cdot 0,49461 = 0,98922.$$

3.29. Една монета се фрла $2N$ пати (N - голем број). Најди ја веројатноста дека "грб" се паднал точно N пати.

Решение. Означуваме со A - на монетата се паднал "грб". Тогаш имаме Бернулиева шема со $n = 2N$ и $p = P(A) = \frac{1}{2}$. Се бара веројатноста на настанот B_N. Од локалната теорема на Моавр-Лаплас имаме

$$P(B_N) \approx \frac{1}{\sqrt{2N\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\,\Phi\Big(\frac{N-2N\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{2N\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\Big) = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\Phi(0) = \sqrt{\frac{2}{N}}\cdot 0,3989 = \frac{0,5642}{\sqrt{N}}.$$

3.6 Задачи за самостојна работа

3.30. Телефонскиот број на еден претплатник има шест цифри. Одреди ја веројатноста сите цифри да се различни.

3.31. На еден студент шансите му се 50% да го положи испитот. Истражувањата покажале дека 40% од положените биле редовни на часови и 10% од неположените биле редовни на часови. Која е веројатноста студентот да го положи испитот, ако бил редовен на часови?

3.32. Една отсечка е поделена на три еднакви дела. На случаен начин на отсечката се фрлаат 3 точки. Најди ја веројатноста дека во секој од трите делови паѓа по една точка.

3.33. Тројца играчи последователно фрлаат монета. Победник е тој кај кој прв ќе се падне "грб". Одреди ја веројатноста за победа на секој од играчите.

3.34. Нека настаните $H_1, H_2, ..., H_n$ се еднаквовозможни и $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Нека $P_{H_i}(A) = \frac{i}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$. Ако во две независни испитувања се разгледува појавување на настанот A, најди ги $P_{A_1 A_2}(H_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, каде A_1 е "успех" при првото испитување, а A_2 е "успех" при второто испитување.

3.35. Еден контролен тест се состои од 5 прашања и на секое од нив понудени се по 4 одговори од кои само еден е точен. Најди ја веројатноста, не знаејќи неден од одговорите (и заокружувајќи ги на случаен начин одговорите), дека
а) одговорено е точно само на 3 прашања,
б) одговорено е точно на не помалку од 3 прашања.

3.36. Во една кутија има три топчиња, 1 црно, 1 црвено и 1 бело. Од кутијата се извлекува по едно топче 5 пати, така што по секое извлекување топчето се враќа во кутијата. Најди ја веројатноста дека црното и белото топче се извлечени не помалку од по 2 пати секое.

3.37. Колку најмалку коцки за играње треба да се фрлат одеднаш за да со веројатност помала од 0,3 може да кажеме дека на ниедна од коцките не се појавиле 6 точки?

3.38. Ако се знае дека 99% од студентите на еден факултет пишуваат со десна рака, а 2% се лева, најди ја веројатноста дека од случајно избрани 200 студенти
а) точно 196 пишуваат само со десна рака,
б) не помалку од 4 пишуваат со лева рака.

3.39. Веројатноста да во една продавноца за чевли случаен купувач купи чевли број 41 е 0,2. Најди ја веројатноста дека од 100 купувачи, чевли број 41 купиле
а) точно 25 луѓе,
б) од 10 до 30 луѓе,
в) не помалку од 35 луѓе.

3.40. а) На отсечката $\overline{AB} = l$, случајно се фрлаат 5 точки. Најди ја веројатноста дека најмалку 4 од нив се на растојание не поголемо од a, $a \in \mathbb{R}$ од средината на отсечката.

б) Ако $l = 10$ и $a = 0,05$, колку точки треба да се фрлат на отсечката $\overline{AB} = l$ за да со веројатност 0,95 најмалку 4 од нив се на растојание не поголемо од од средината на отсечката.

3.41. Еден експеримент се состои во фрлање на монета 4040 пати, при што "грб" се паднал 2048 пати. Најди ја веројатноста дека при повторување на тој експеримент релативната честота на појавување на "грб" се отклонува по апсолутна вредност од 0,5 не повеќе од истата при првото изведување на експериментот.

Одговори

3.30 0,1512; **3.31** 0,8; **3.32** 2/9; **3.33** 4/7; 2/7; 1/7; **3.34** $P_{A_1A_2}(H_i) = \frac{4i^2}{n(n+1)^2}$, $i = 1, 2, ..., n$; **3.35** 0,088; 0,104; **3.36** 0,206; **3.37** 7; **3.38** 0,195367; 0,566528; **3.39** 0,04565; 0,99132; 0,00015; **3.40** $16a^4(5l-8a)/(l^5)$, $0 \leq a \leq l/2$; 1, $a > l/2$; 0, $a < 0$; 819; **3.41** 0,63188;

4

Случајни променливи

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност.

4.1 Случајна променлива. Функција на распределба

- Реално вредносната функција $X : \Omega \to \mathbb{R}$ се нарекува **случајна променлива**, ако за секој $x \in \mathbb{R}$,

$$\{X \in (-\infty, x)\} = \{X < x\} = \{w : X(w) < x\} = X^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}, \qquad (4.1)$$

  т.е. е случаен настан.

- За настанот $A \subseteq \Omega$ (т.е $A \in \mathcal{F}$), функцијата $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$I_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases} \qquad (4.2)$$

  е случајна променлива која се нарекува **индикатор на настанот** A. Множеството вредности на случајната променлива I_A е $I_A(\Omega) = \{0, 1\}$ и

$$\begin{aligned} P\{I_A = 1\} &= P\{w : I_A(w) = 1\} = P\{w : w \in A\} = P(A), \\ P\{I_A = 0\} &= P\{w : I_A(w) = 0\} = P\{w : w \notin A\} = P(\overline{A}) = 1 - P(A). \end{aligned}$$

- Ако множеството вредности на една случајна променлива X е конечно или преброиво т.е. $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, тогаш се вели дека случајната променлива X е од **дискретен тип** и

$$P\{X = x_i\} = p_i, \ i = 1, 2, ..., n, ..., \qquad (4.3)$$

  при што $p_1 + p_2 + ... + p_n + ... = 1$, е **закон на распределба** на X. Некои поважни дискретни распределби се дадени во Прилог В.

- Од дефиницијата (4.1) следи дека, ако $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е случајна променлива, тогаш за секое Борелово множество $B \in \mathcal{B}$, каде $\mathcal{B}$ е Бореловата σ-алгебра, важи
$$X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{F}. \tag{4.4}$$

- Функцијата $P_X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ дефинирана со
$$P_X(B) = P\{w : X(w) \in B\} = P(X^{-1}(B)), \tag{4.5}$$
за секој $B \in \mathcal{B}$, се нарекува **закон на случајната променлива** X.

- Функцијата $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана со
$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = P\{w : X(w) < x\} = P(X < x) \tag{4.6}$$
се нарекува **функција на распределба** на X.

- За функцијата на распределба $F_X(x)$ важат следните својства:
  1) $F_X(x)$ е неопаѓачка функција,
  2) $F_X(x)$ е непрекината од лево т.е. $F_X(x-0) = F_X(x)$,
  3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$,
  4) $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

- Веројатноста на настаните да X прима вредности од некој интервал, изразена преку вредности на функцијата на распределба е
$$\begin{aligned}
P\{x_1 \le X < x_2\} &= F_X(x_2) - F_X(x_1),\\
P\{x_1 \le X \le x_2\} &= F_X(x_2+0) - F_X(x_1),\\
P\{x_1 < X \le x_2\} &= F_X(x_2+0) - F_X(x_1+0),\\
P\{x_1 < X < x_2\} &= F_X(x_2) - F_X(x_1+0),\\
P\{X = x\} &= F_X(x+0) - F_X(x).
\end{aligned}$$

- Ако функцијата на распределба $F_X(x)$ е непрекината функција, тогаш се вели дека X е **непрекината случајна променлива**. Ако функција на распределба $F_X(x)$ е апсолутно непрекината функција т.е. ако постои ненегативна функција $p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така да
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du, \tag{4.7}$$

за сите $x \in \mathbb{R}$, тогаш се вели дека X е **апсолутно непрекината случајна променлива**, а функцијата $p_X(x)$ се нарекува **густина на распределба** на X. Некои поважни непрекинати распределби се дадени во Прилог В.

Алтернативна дефиниција за **дискретна случајна променлива** е ако изводот на функцијата на распределба постои и е еднаков на нула скоро секаде, освен во преброиво многу точки кои се вредностите кои ги прима случајната променлива. За дискретна случајна променлива се вели дека нема густина на распределба.

- Покрај својството (4.7) други својства на густината на распределба $p_X(x)$ се:

  1) $p_X(x) \geq 0$,
  2) $F'_X(x) = p_X(x)$,
  3) $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\, dx = 1$,
  4) $P\{X \in B\} = \int_B p_X(x)dx$, за $B \in \mathcal{B}$.

4.1. Нека е даден веројатностниот простор $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, каде $\Omega = \{(a,b) \mid a, b \in \{1,2\}\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ и $P(w) = \frac{1}{4}$, за секој $w \in \Omega$. Покажи дека пресликувањето $X : \Omega \to \mathbb{R}$ дадено со $X(a,b) = a + b$ е случајна променлива. Определи ја минималната σ-алгебра $\mathcal{F}_{\min}$ во однос на која X е случајна променлива. Најди го законот на распределба на X и функцијата на распределба $F_X(x)$ на X.

Решение. Множеството од елемнтарни настани е $\Omega = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$, додека множеството вредности на X е $X(\Omega) = \{2,3,4\}$. Тогаш,

$$
\begin{aligned}
&\text{за } x \leq 2,\ \{X < x\} = \emptyset \in \mathcal{F},\\
&\text{за } 2 < x \leq 3,\ \{X < x\} = \{(1,1)\} \in \mathcal{F},\\
&\text{за } 3 < x \leq 4,\ \{X < x\} = \{(1,1), (1,2), (2,1)\} \in \mathcal{F},\\
&\text{за } x > 4,\ \{X < x\} = \Omega \in \mathcal{F},
\end{aligned}
$$

па следи дека X е случајна променлива.

Минималната σ-алгебра во однос на која X е случајна променлива е

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\min} \;=\;& \{\Omega, \emptyset, \{(1,1)\}, \{(1,1), (1,2), (2,1)\}, \{(1,2), (2,1), (2,2)\},\\
& \{(1,2), (2,1)\}, \{(1,1), (2,2)\}\}.
\end{aligned}
$$

Законот на распределба на X е

$$\begin{aligned} P\{X=2\} &= P\{(1,1)\} = \frac{1}{4}, \\ P\{X=3\} &= P\{(1,2),(2,1)\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ P\{X=4\} &= P\{(2,2)\} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

или со табела

x	2	3	4
$P\{X=x\}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Функцијата на распределба $F_X(x)$ на X е

за $x \leq 2,\ F_X(x) = P\{X < x\} = P\{X \in \emptyset\} = 0,$

за $2 < x \leq 3,\ F_X(x) = P\{X < x\} = P\{X = 2\} = \dfrac{1}{4},$

за $3 < x \leq 4,\ F_X(x) = P\{X < x\} = P\{X \in \{2,3\}\} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4},$

за $x > 4,\ F_X(x) = P\{X < x\} = P\{X \in \{2,3,4\}\} = 1,$

односно

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 2 \\ 1/4 & , 2 < x \leq 3 \\ 3/4 & , 3 < x \leq 4 \\ 1 & , x > 4 \end{cases}$$

4.2. Дадена функцијата на распределба $F_X(x)$ на случајната променлива X со

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq -2 \\ 0,2 & , -2 < x \leq 1 \\ 0,5 & , 1 < x \leq 3 \\ 0,7 & , 3 < x \leq 4 \\ 1 & , x > 4 \end{cases}$$

Определи го законот на распределба на X.

Решение. Вредностите кои ги прима случајната променлива X се точките на прекин на $F_X(x)$ т.е. $X \in \{-2, 1, 3, 4\}$. Законот на распределба на X е

$$\begin{aligned} P\{X=-2\} &= F_X(-2+0) - F(-2) = 0,2 - 0 = 0,2 \\ P\{X=1\} &= F_X(1+0) - F(1) = 0,5 - 0,2 = 0,3 \\ P\{X=3\} &= F_X(3+0) - F(3) = 0,7 - 0,5 = 0,2 \\ P\{X=4\} &= F_X(4+0) - F(4) = 1 - 0,7 = 0,3 \end{aligned}$$

или со табела

x	-2	1	3	4
$P\{X=x\}$	0,2	0,3	0,2	0,3

4.3. Дадена е случајната променлива X со нејзиниот закон на распределба

x	1	2	3	5	7
$P\{X=x\}$	$a/2$	$a/3$	$a/3$	$a/2$	$a/3$

а) Определи ја вредноста на $a \in \mathbb{R}$.
б) Најди ги веројатностите $P\{X \in \{3,5\}\}$, $P\{X < 5\}$ и $P\{-3 < X \leq 8\}$.

Решение. а) Од $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=1$ добиваме дека $a=\frac{1}{2}$, па законот на распределба на X ќе биде

x	1	2	3	5	7
$P\{X=x\}$	1/4	1/6	1/6	1/4	1/6

б) $P\{X \in \{3,5\}\} = P\{X=3\}+P\{X=5\} = \frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$, $P\{X<5\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$ и $P\{-3<X\leq 8\}=P\{X\in\{1,2,3,5,7\}\}=1$.

4.4. Најди го законот на распределба на случајната променлива X - број на појавувања на "грб" при две независни фрлања на монета.

Решение. Вредностите кои ги прима X се $X \in \{0,1,2\}$. Означуваме со A_i - во i-тото фрлање на монетата се појавил "грб", $i=1,2$. Тогаш, A_1 и A_2 се независни настани со $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$. За распределбата на X имаме

$$
\begin{aligned}
P\{X=0\} &= P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\\
P\{X=1\} &= P(A_1\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\\
P\{X=2\} &= P(A_1\,A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

или со табела

x	0	1	2
$P\{X=x\}$	1/4	1/2	1/4

4.5. Во една кутија има 3 бели и 3 црни топчиња. Играчите A и B извлекуваат по тој редослед по едно топче без враќање. Извлекуваат се додека не се извлече бело топче. Победник во играта е тој што ќе извлече бело топче. Најди ги распределбите на случајните променливи
а) $X = I_C$, каде C - победник е играчот A,
б) Y - број на изведени извлекувања.

Решение. Означуваме со A_i - играчот A во i-тото извлекување извлекува бело топче, $i = 1, 3$, а со B_j - играчот B во j-тото извлекување извлекува бело топче, $j = 2, 4$.

а) За настанот C имаме дека $C = A_1 + \overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3$, од каде, за неговата веројатност имаме,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1) + P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3) = P(A_1) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{A_1}\ \overline{B_2}}(A_3) = \\ &= \frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{13}{20} = 0,65. \end{aligned}$$

Случајната променлива $X = I_C$ прима две вредности $X \in \{0,1\}$, и нејзината распределба е

$$P\{X = 0\} = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,65 = 0,35,\ P\{X = 1\} = P(C) = 0,65.$$

б) Случајната променлива Y прима вредности $Y \in \{1,2,3,4\}$, и нејзината распределба е

$$\begin{aligned} P\{Y = 1\} &= P(A_1) = \frac{3}{6} = 0,5, \\ P\{Y = 2\} &= P(\overline{A_1}\ B_2) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(B_2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = 0,3, \\ P\{Y = 3\} &= P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ A_3) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{A_1}\ \overline{B_2}}(A_3) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = 0,15, \\ P\{Y = 4\} &= P(\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ \overline{A_3}\ B_4) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2})P_{\overline{A_1}\ \overline{B_2}}(\overline{A_3})P_{\overline{A_1}\ \overline{B_2}\ \overline{A_3}}(B_4) = \\ &= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} = 0,05. \end{aligned}$$

4.6. Еден човек има 8 еднакви по големина и облик клучеви. Од сите нив само еден ја отвара вратата од неговиот стан. Тој се обидува да ја отвори вратата така што испробува еден по еден клуч и по секој обид клучот со кој се обидел да ја отвори вратата го трга на страна, т.е. го издвојува од купчето клучеви. Најди ја распределбата на случајната променлива X - број на обиди додека човекот не ја отвори вратата од својот стан.

Решение. Означуваме со A_i - во i-тиот обид човекот го избрал вистинскиот клуч, т.е. ја отворил вратата од својот стан, $i = 1, 2, ..., 8$. Случајната променлива X прима вредности $X \in \{1, 2, ..., 8\}$, а нејзината распределба е

$$\begin{aligned} P\{X = 1\} &= P(A_1) = \frac{1}{8} = 0,125, \\ P\{X = 2\} &= P(\overline{A_1}\ A_2) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{8} = 0,125, \\ P\{X = 3\} &= P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})P_{\overline{A_1}\ \overline{A_2}}(A_3) = \frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{8} = 0,125, \end{aligned}$$

на сличен начин,

$$P\{X=4\}=P\{X=5\}=P\{X=6\}=P\{X=7\}=P\{X=8\}=0,125.$$

4.7. Од множеството $\{1,2,...,n\}$, $n\geq 2$ случајно се бираат истовремено два броја x и y. Нека $X=\max\{x,y\}$.

а) Најди го законот на распределба на случајната променлива X.

б) Најди ги веројатностите $P\{0,5<X\leq 3,56\}$ и $P\{X>2,6\}$.

Решение. Множеството од елементарни настани е $\Omega=\{\{x,y\}|x,y\in\{1,2,...,n\}\}$, од каде $|\Omega|=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$.

а) Случјната променлива X прима вредности $X\in\{2,3,...,n\}$, а нејзиниот закон на распределба е

$$P\{X=k\}=\{\{x,k\}|x\in\{1,2,...,k-1\}\}=\frac{2(k-1)}{n(n-1)},\ k=2,3,...,n.$$

б) $P\{0,5<X\leq 3,56\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{2\cdot(2-1)}{n(n-1)}+\frac{2\cdot(3-1)}{n(n-1)}=\frac{8}{n(n-1)}$, $P\{X>2,6\}=1-P\{X\leq 2,6\}=1-P\{X=2\}=1-\frac{2\cdot(2-1)}{n(n-1)}=\frac{n^2-n-2}{n(n-1)}$.

4.8. Веројатноста да се појави настанот B при некое испитување е p, $0<p<1$. Испитувањата се вршат независно едно од друго се додека не се појави комбинацијата $B\overline{B}$. Нека Y е број на испитувања потребни за да комбинацијата $B\overline{B}$ се појави по прв пат. Определи го законот на распределба на Y.

Решение. Случајната променлива Y ги прима вредностите $Y\in\{2,3,...\}$ со веројатности

$$\begin{aligned} P\{Y=k\} &= P(\underbrace{BB...B}_{k-1}\overline{B}+\overline{B}\underbrace{BB...B}_{k-2}\overline{B}+...+\underbrace{\overline{B}\,\overline{B}...\overline{B}}_{k-2}B\overline{B})= \\ &= p^{k-1}q+p^{k-2}q^2+...+pq^{k-1}=q^k\frac{p}{q}\Big(1+\frac{p}{q}+\Big(\frac{p}{q}\Big)^2+...+\Big(\frac{p}{q}\Big)^{k-2}\Big), \end{aligned}$$

каде $q=1-p$. Разгледуваме два случаја $p\neq\frac{1}{2}$ и $p=\frac{1}{2}$.

Ако $p\neq\frac{1}{2}$, тогаш

$$P\{Y=k\}=q^k\frac{p}{q}\cdot\frac{1-(\frac{p}{q})^{k-1}}{1-\frac{p}{q}}=pq\,\frac{q^{k-1}-p^{k-1}}{q-p},\ k=2,3,....$$

Ако $p=\frac{1}{2}$, тогаш

$$P\{Y=k\}=(k-1)\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^k,\ k=2,3,...$$

4.9. Функцијата на распределба на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип е дадена со

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \\ k(x-1)^2 & , 1 < x \leq 3 \\ 1 & , x > 3 \end{cases}$$

а) Одреди ја вредноста на $k \in \mathbb{R}$ и густината на распределеба $p_X(x)$ на X.
б) Најди ја веројатноста дека X прима вредности од интервалот $(1, 2)$.

Решение. а) Случајна променлива од апсолутно непрекинат тип има апсолутно непрекината функција на распределба, што значи дека $F_X(x)$ е непрекината и постои густина на распределеба на $p_X(x) = F'_X(x)$. Од непрекинатоста на $F_X(x)$ имаме дека

$$F_X(3) = F_X(3+0) \ \Rightarrow \ k \cdot (3-1)^2 = 1 \ \Rightarrow \ k = \frac{1}{4},$$

па функцијата на распределба на X е

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \\ \frac{1}{4}(x-1)^2 & , 1 < x \leq 3 \\ 1 & , x > 3 \end{cases}$$

од каде густината на распределба е

$$p_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & , 1 < x \leq 3 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}$$

б) $P\{X \in (1,2)\} = P\{1 < X < 2\} = F_X(2) - F_X(1+0) =$
$= F_X(2) - F_X(1) = \frac{1}{4} \cdot (2-1)^2 - 0 = \frac{1}{4}.$

4.10. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{2}x & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}$$

а) Одреди ја вредноста на $a \in \mathbb{R}$ и функцијата на распределба $F_X(x)$ на X.
б) Најди ја веројатноста дека X прима вредности од интервалот $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Решение. а) Од својството $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$ имаме

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = \int_0^1 \frac{a}{2}xdx = \frac{a}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{a}{4},$$

од каде имаме дека $a = 4$, па густината на распределба е

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x \le 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

Функцијата на распределба изразена преку густината на распределба е $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du$, од каде

за $x \le 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = 0$,

за $0 < x \le 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^x 2u\,du = 2\frac{u^2}{2}\Big|_0^x = x^2$,

за $x > 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^1 2u\,du = 1$,

односно

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ,x \le 0 \\ x^2 & ,0 < x \le 1 \\ 1 & ,x > 1 \end{cases}$$

б) $P\{X \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} = P\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\} = \int_{-1/2}^{1/2} p_X(x)dx =$
$= \int_{-1/2}^{0} p_X(x)dx + \int_0^{1/2} p_X(x)dx = 0 + \int_0^{1/2} 2x\,dx = \frac{1}{4}$.

4.11. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x \le \frac{1}{2} \\ 3ax + x^2 & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

а) Одреди ја вредноста на $a \in \mathbb{R}$ и функцијата на распределба $F_X(x)$ на X.

б) Најди ја веројатноста дека X прима вредности од интервалот $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Решение. а) Од $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$ имаме

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = \int_0^{1/2} 2xdx + \int_{1/2}^{1} (3ax + x^2)dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2} + (3a \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})\Big|_{1/2}^{1} =,$$

$$= \frac{1}{4} + (\frac{3a}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3a}{8} - \frac{1}{24}) = \frac{27a + 13}{24}$$

од каде имаме дека $a = \frac{11}{27}$, па густината на распределба е

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x \le \frac{1}{2} \\ \frac{11}{9}x + x^2 & ,\frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

Функцијата на распределба изразена преку густината на распределба е $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du$, од каде за $x \leq 0,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = 0,$

за $0 < x \leq \frac{1}{2},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^x 2u\ du = 2\frac{u^2}{2}\Big|_0^x = x^2,$

за $\frac{1}{2} < x \leq 1,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^{1/2} 2u\ du + \int_{1/2}^{x}(\frac{11}{9}u + u^2)\ du = 2\frac{u^2}{2}\Big|_0^{1/2} +$ $(\frac{11}{9}\cdot\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3})\Big|_{1/2}^{x} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{18}x^2 + \frac{1}{18},$

за $x > 1,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)du = \int_0^{1/2} 2u\ du + \int_{1/2}^{1}(\frac{11}{9}u + u^2)\ du = 1.$

односно

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x^2 & , 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{18}x^2 + \frac{1}{18} & , \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

б) $P\{X \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})\} = P\{\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\} = \int_{1/4}^{3/4} p_X(x)dx =$
$= \int_{1/4}^{1/2} p_X(x)dx + \int_{1/2}^{3/4} p_X(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 2x\ dx + \int_{1/2}^{3/4}(\frac{11}{9}x + x^2)\ dx =$
$2\frac{x^2}{2}\Big|_{1/4}^{1/2} + (\frac{11}{9}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})\Big|_{1/2}^{3/4} = \frac{135}{576} = 0,234375$

4.12. Еден амперметар мери со точност до 0,1 ампери. При тоа, при мерење на јачината на струјата тој ја дава истата заокружена до најблиската вредност. Најди ја веројатноста дека при мерење на јачината на струјата ќе се направи грешка поголема од 0,02 ампери.

Решение. Нека X е грешка при мерењето на јачината на струјата со амперметарот, тогаш X е рамномерно распределена меѓу најмалата и најголемата грешка, т.е. $X \sim \mathcal{U}(0; 0,5)$, од каде густината на распределба на X е

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{0{,}05} & , x \in (0; 0,05) \\ 0 & , x \notin (0; 0,05) \end{cases} = \begin{cases} 20 & , x \in (0; 0,05) \\ 0 & , x \notin (0; 0,05) \end{cases}$$

Па, бараната веројатност е

$$P\{X > 0,02\} = \int_{0{,}02}^{\infty} p_X(x)\ dx = \int_{0{,}02}^{0{,}05} 20\ dx = 0,6.$$

4.13. Докажи дека функцијата $F(x) = 0,5 + \Phi_0(x)$, каде $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$ е функцијата на Лаплас, е функција на распределба на некоја случајна променлива X. Потоа најди ги веројатностите $P\{-1 \leq X \leq 1\}$ и $P\{X = x_0\}$, каде x_0 е произволен реален број.

Решение. Бидејќи $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 0,5$ (покажи!), имаме

$$F(x) = 0,5 + \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

од каде следи дека $F(x)$ е функција на распределба на случајна променлива X која има густина на распределба $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, односно $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Вредностите на функцијата $\Phi_0(x)$ се читаат од Таблица 4 (Прилог А). Па, бараните веројатности се

$$\begin{aligned} P\{-1 \le X \le 1\} &= F(1) - F(-1) = 0,5 + \Phi_0(1) - 0,5 - \Phi_0(-1) = 2\Phi_0(1) = \\ &= 2 \cdot 0,34134 = 0,68268 \\ P\{X = x_0\} &= F(x_0 + 0) - F(x_0) = F(x_0) - F(x_0) = 0. \end{aligned}$$

4.14. Избираме случаен број X од интервалот $[2,10]$ со густина на распределба од облик $p(x) = Cx$, каде C е константа.

а) Најди ја вредноста на константата C.

б) Најди ги веројатностите $P\{X > 5\}$ и $P\{X^2 - 12X + 35 > 0\}$.

Решение. а) Бидејќи $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$, имаме

$$1 = \int_2^{10} Cxdx = C\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^{10} = C(\frac{100}{2} - \frac{4}{2}) = 48C,$$

од каде $C = 1/48$, значи густината на распределба е $p(x) = x/48$, $x \in [2,10]$.

б) $P\{X > 5\} = \int_5^{+\infty} p(x)dx = \int_5^{10} \frac{x}{48}dx = \frac{1}{48} \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_5^{10} = \frac{1}{48} \cdot (\frac{100}{2} - \frac{25}{2}) = 0,78125.$
$P\{X^2 - 12X + 35 > 0\} = P\{(X-5)(X-7) > 0\} = P\{X \in (-\infty, 5) \cup (7, +\infty)\} =$
$= 1 - P\{X \in [5,7]\} = 1 - \int_5^7 p(x)dx = 1 - \int_5^7 \frac{x}{48}dx = 1 - \frac{1}{48} \cdot \left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|_5^7 =$
$= 1 - \frac{1}{48} \cdot (\frac{49}{2} - \frac{25}{2}) = 1 - 0,25 = 0,75.$

4.2 Функции од случајни променливи

- **Теорема.** Нека X е случајна променлива и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција (т.е. за секое Борелово множество $B \in \mathcal{B}$ важи $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$). Тогаш, секоја функција $Y = f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ е исто така случајна променлива.

4.15. Случајната променлива X има биномна распределба $\mathcal{B}(3, \frac{1}{4})$. Најди ја распределбата на случајната променлива $Y = 2X + 1$.

Решение. Случајната променлива X прима вредности $X \in \{0,1,2,3\}$, од каде случајната променлива $Y = 2X + 1$ прима вредности $Y \in \{1,3,5,7\}$ со веројатности

$$P\{Y = 1\} = P\{2X + 1 = 1\} = P\{X = 0\} = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},$$

$$
\begin{aligned}
P\{Y=3\} &= P\{2X+1=3\}=P\{X=1\}=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64},\\
P\{Y=5\} &= P\{2X+1=5\}=P\{X=2\}=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64},\\
P\{Y=7\} &= P\{2X+1=7\}=P\{X=3\}=\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}.
\end{aligned}
$$

4.16. Случајната променлива X има закон на распределба даден со табелата

x	0	1	2	3
$P\{X=x\}$	0,1	0,3	0,4	0,2

Најди ја распределбата на случајната променлива $Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)+1$.

Решение. Случајната променлива $Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)+1$ прима вредности $Y\in\{\sin(\frac{\pi}{2}x)+1 \mid \ x\in\{0,1,2,3\}\}=\{0,1,2\}$ со веројатности

$$
\begin{aligned}
P\{Y=0\} &= P\{\sin(\frac{\pi}{2}X)+1=0\}=P\{X=3\}=0,2,\\
P\{Y=1\} &= P\{\sin(\frac{\pi}{2}X)+1=1\}=P\{X\in\{0,2\}\}=0,1+0,4=0,5,\\
P\{Y=2\} &= P\{\sin(\frac{\pi}{2}X)+1=2\}=P\{X=1\}=0,3.
\end{aligned}
$$

4.17. Најди ја густината на распределба на случајната променлива Y ако
а) $Y=aX+b$, $a>0$, каде $X\sim\mathcal{U}(\alpha,\beta)$,
б) $Y=-\ln X$, каде $X\sim\mathcal{U}(0,1)$,
в) $Y=aX+b$, $a>0$, каде $X\sim\mathcal{N}(m,\sigma^2)$,
г) $Y=\frac{1}{X}$, каде $X\sim\mathcal{N}(0,1)$,

Решение. а) Од $X\sim\mathcal{U}(\alpha,\beta)$ имаме дека $p_X(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}$, за $x\in(\alpha,\beta)$. За функцијата на распределба на Y имаме

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{aX+b<y\}=P\{X<\frac{y-b}{a}\}=F_X(\frac{y-b}{a}),$$

од каде за гыстината на распределба на Y имаме

$$p_Y(y)=F'_Y(y)=F'_X(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a}=p_X(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{1}{a},\ \text{за}\ \alpha<\frac{y-b}{a}<\beta,$$

односно

$$p_Y(y)=\frac{1}{(a\beta+b)-(a\alpha+b)},\ \text{за}\ a\alpha+b<y<a\beta+b,$$

па Y има повторно рамномерна распределба $Y\sim\mathcal{U}(a\alpha+b,a\beta+b)$.

б) Од $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ имаме дека $p_X(x) = 1$, за $x \in (0,1)$. За функцијата на распределба на Y имаме

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y < y\} = P\{-\ln X < y\} = P\{\ln X > -y\} = P\{X > e^{-y}\} = \\ &= 1 - P\{X \leq e^{-y}\} = 1 - F_X(e^{-y}), \end{aligned}$$

од каде за густината на распределба на Y имаме

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = -F'_X(e^{-y}) \cdot (-e^{-y}) = p_X(e^{-y}) \cdot e^{-y} = e^{-y}, \text{ за } 0 < e^{-y} < 1,$$

односно

$$p_Y(y) = e^{-y}, \text{ за } y > 0,$$

па Y има експоненцијална распределба $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

в) Од $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ имаме дека $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, за $x \in \mathbb{R}$. Од а) за функцијата на распределба и густината на распределба на $Y = aX + b$ имаме

$$F_Y(y) = F_X(\frac{y-b}{a}) \text{ и } p_Y(y) = p_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a},$$

од каде

$$p_Y(y) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a\sigma}\, e^{-\frac{(y-(am+b))^2}{2a^2\sigma^2}}, \text{ за } x \in \mathbb{R}$$

па Y има повторно нормална распределба $Y \sim \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

Да забележиме дека ако $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, тогаш $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

г) Од $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ имаме дека $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, за $x \in \mathbb{R}$. За функцијата на распределба на Y имаме

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y < y\} = P\{\frac{1}{X} < y\} = \\ &= P\{\frac{1}{X} < y, X < 0\} + P\{\frac{1}{X} < y, X > 0\} = \\ &= P\{1 > yX, X < 0\} + P\{1 < yX, X > 0\} = \\ &= \begin{cases} P\{\frac{1}{y} < X, X < 0\} + P\{\frac{1}{y} > X, X > 0\} & , y < 0 \\ P\{\frac{1}{y} > X, X < 0\} + P\{\frac{1}{y} < X, X > 0\} & , y > 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} P\{\frac{1}{y} < X < 0\} + P(\emptyset) & , y < 0 \\ P\{X < 0\} + P\{X > \frac{1}{y}\} & , y > 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} F_X(0) - F_X(\frac{1}{y}) + 0 & , y < 0 \\ F_X(0) + 1 - F_X(\frac{1}{y}) & , y > 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0,5 - F_X(\frac{1}{y}) & , y < 0 \\ 1,5 - F_X(\frac{1}{y}) & , y > 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

при што искористивме дека $F_X(0) = 0,5$ (види Задача 4.13). Тогаш, за густината на распределба на Y имаме

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = -F'_X(\frac{1}{y}) \cdot (-\frac{1}{y^2}) = p_X(\frac{1}{y}) \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, y^2}\, e^{-\frac{1}{2y^2}}, \text{ за } y \neq 0.$$

4.18. Случајната променлива X има $\mathcal{N}(2, 0.5^2)$ распределба. Најди ги веројатностите $P\{X^2 - 5X + 6 > 0\}$ и $P\{X \leq 1 \text{ или } X^2 > 4\}$.

Решение. Според Задача 4.17 в), ако $X \sim \mathcal{N}(2, 0.5^2)$, тогаш $\frac{X-2}{0,5} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Па имаме, $P\{X^2 - 5X + 6 > 0\} = P\{(X-2)(X-3) > 0\} = P\{X \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)\} =$
$= 1 - P\{2 \leq X \leq 3\} = 1 - P\{\frac{2-2}{0,5} \leq \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{3-2}{0,5}\} = 1 - P\{0 \leq \frac{X-5}{0,1} \leq 2\} = \Phi_0(2) - \Phi_0(0) =$
$= 0,47725 - 0 = 0,47725$.
Потоа, $P\{X \leq 1 \text{ или } X^2 > 4\} = P\{X \leq 1\} + P\{X^2 > 4\} - P\{X \leq 1 \text{ и } X^2 > 4\} =$
$= P\{X \in (-\infty, 1]\} + P\{X \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)\} - P\{X \in (-\infty, -2)\} =$
$= P\{X \in (-\infty, 1]\} + P\{X \in (-\infty, -2)\} + P\{X \in (2, +\infty)\} - P\{X \in (-\infty, -2)\} =$
$= P\{X \in (-\infty, 1]\} + P\{X \in (2, +\infty)\} = 1 - P\{X \in (1, 2]\} = P\{1 < X \leq 2\} =$
$= P\{\frac{1-2}{0,5} < \frac{X-2}{0,5} \leq \frac{2-2}{0,5}\} = P\{-2 < \frac{X-2}{0,5} \leq 0\} = \Phi_0(0) - \Phi_0(-2) = \Phi_0(0) + \Phi_0(2) =$
$= 0 + 0,47725 = 0,47725$.

4.19. Случајната променлива X има норнална распределба $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ со параметри $m = 0$ и $\sigma = 1$. Најди ја густината на распределба на случајната променлива $Y = |X|$.

Решение. Од $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ имаме дека $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, за $x \in \mathbb{R}$. За функцијата на распределба на Y, за $y > 0$, имаме

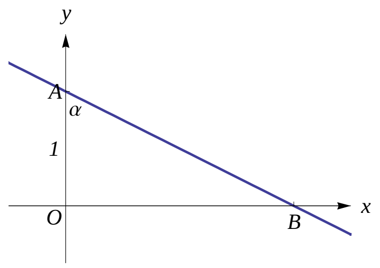
$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{|X| < y\} = P\{-y < X < y\} = F_X(y) - F_X(-y),$$

од каде за густината на распределба на Y, за $y > 0$, имаме

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= F'_Y(y) = F'_X(y) - F'_X(-y) \cdot (-1) = F'_X(y) + F'_X(-y) = \\ &= p_X(y) + p_X(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(-y)^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}, \text{ за } y > 0. \end{aligned}$$

Да забележиме дека за $y < 0$, $F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{|X| < y\} = P(\emptyset) = 0$, па и $p_Y(y) = 0$ за $y < 0$.

4.20. Нека точката A се наоѓа на оската Oy на растојание 1 од координатниот почеток. Низ A се повлекува произволна права a која зафаќа агол α со оската Oy и при тоа распределбата на вредности на аголот α е рамномерна од $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Најди ја густината на распределба на апцисата на точката B добиена како пресек на правата a со Ox оската.



Цртеж 4.1: Геометриски приказ за задачата 4.20

Решение. Означуваме со X - вредност на аголот α, тогаш $X \sim \mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, од каде $p_X(x) = \frac{1}{\pi}$, за $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Од услов на задачата, $\overline{OA} = 1$, $\alpha = \widehat{OAB}$, па бидејќи $\tan \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$, имаме дека $\overline{OB} = \tan \alpha$ (види Цртеж 4.1).

Нека Y е вредност на апцисата на точката B, тогаш $Y = \tan X$. Па за функцијата на распределба на Y имаме

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\tan X < y\} = P\{X < \arctan y\} = F_X(\arctan y),$$

од каде за густината на распределба на Y имаме

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= F'_Y(y) = F'_X(\arctan y) \cdot \frac{1}{1+y^2} = p_X(\arctan y) \cdot \frac{1}{1+y^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}, \text{ за } -\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

односно

$$p_Y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}, \text{ за } -\infty < y < +\infty,$$

што значи дека вредноста на апцисата на точката B има Кошиева распределба.

4.3 Случајни вектори. Условни распределби

- Функцијата $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ се нарекува **повеќедимензионална случајна променлива** или **(n димензионален) случаен вектор** ако за сите Борелови множества $B \in \mathcal{B}^n$

$$X^{-1}(B) = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}. \tag{4.8}$$

- Да забележиме дека $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ е векторска функција, и за секој $w \in \Omega$ може да се запише $X(w) = (X_1(w), X_2(w), ..., X_n(w))$, каде компонентите X_i, $i = 1, 2, ..., n$ се функции од Ω во $\mathbb{R}$. Може да се покаже дека

$X_1, X_2, ..., X_n$ се случајни променливи ако и само ако $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е n-димензионален случаен вектор.

- Случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е од **дискретен тип**, ако множеството вредности $X(\Omega)$ е конечно или пребroиво.

  На пример, за $n = 2$ да го разгледаме случајниот вектор (X, Y). Нека случајната променлива X прима вредности $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, а случајната променлива Y прима вредности $\{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$. Тогаш,

  ⋆ **законот на распределба** на (X, Y) е даден со

  $$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},\ i = 1, 2, ...,\ j = 1, 2, ..., \tag{4.9}$$

  при што $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$,

  ⋆ **маргиналните закони на распределба** на X и Y соодветно се

  $$P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij} = p_i^*,\ i = 1, 2, ..., \tag{4.10}$$

  $$P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} = q_j^*,\ j = 1, 2, ..., \tag{4.11}$$

  и при тоа важи $\sum_i p_i^* = 1$ и $\sum_j q_j^* = 1$,

  ⋆ **условните закони на распределба** на X при услов $Y = y_k$ и на Y при услов $X = x_l$ соодветно се

  $$P\{X = x_i \mid Y = y_k\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_k\}}{P\{Y = y_k\}},\ i = 1, 2, ..., \tag{4.12}$$

  $$P\{Y = y_j \mid X = x_l\} = \frac{P\{X = x_l, Y = y_j\}}{P\{X = x_l\}},\ j = 1, 2, ... \tag{4.13}$$

- Функцијата $P_X : \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}$ дефинирана со

  $$P_X(B) = P\{w : X(w) \in B\} = P(X^{-1}(B)) \tag{4.14}$$

  се нарекува **закон на случајниот вектор** X.

- Функцијата $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинирана со

  $$F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n) \tag{4.15}$$

  се нарекува **функција на распределба** на случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

- Својства на функцијата на распределба F_X на случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ се

  1) F_X е неопаѓачка по секој аргумент,
  2) F_X е непрекината од лево по секој аргумент,
  3) $\lim_{x_1 \to -\infty} F_X(x) = \lim_{x_2 \to -\infty} F_X(x) = ... = \lim_{x_n \to -\infty} F_X(x) = 0$, каде $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$,
  4) $\lim_{x_i \to +\infty,\, i=1,...,n} F_X(x) = 1$, каде $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

- Ако $F_X(x)$ е апсолутно непрекината функција т.е. ако постои ненегативна функција $p_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ така да

$$F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} p_X(u_1, ..., u_n) du_1 ... du_n \tag{4.16}$$

  за сите $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, тогаш X е случаен вектор од **апсолутно непрекинат тип**, а функцијата p_X се нарекува **густина на распределба** на X.

- Покрај својството (4.16) други својства на густината на распределба p_X на случајниот вектор X се

  1) $p_X(x) \geq 0$, каде $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$,
  2) $\frac{\partial^n F(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = p_X(x)$, каде $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$,
  3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n = 1$,
  4) $P\{X \in B\} = \int_B p_X(x) dx$, за $B \in \mathcal{B}^n$, каде $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ (интегралот е n-кратен интеграл).

- На пример, за $n = 2$ да го разгледаме случајниот вектор (X, Y) од апсолутно непрекинат тип со густина на распределба $p(x, y)$. Тогаш,

  $\star$ **маргиналните густини на распределба** на X и Y соодветно се

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dy, \tag{4.17}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dx, \tag{4.18}$$

- ⋆ **условните густини на распределба** на X при услов $Y = y$ и на Y при услов $X = x$ соодветно се

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}, \tag{4.19}$$

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}. \tag{4.20}$$

- Случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ велиме дека се **независни** ако за секој избор на Борелови множества $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}$ имаме

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, ..., X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)P(X_2 \in B_2)...P(X_n \in B_n). \tag{4.21}$$

На пример, за $n = 2$ да ги разгледаме случајните променливи X и Y.

- ⋆ Ако X и Y се случајни променливи од дискретен тип при што X прима вредности $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, а Y прима вредности $\{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$, тогаш X и Y се независни, ако

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}, \text{ за сите } i,\ j.$$

- ⋆ Ако X и Y се случајни променливи од апсолутно непрекинат тип со густини на распределба $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ соодветно, тогаш X и Y се независни, ако

$$p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y), \text{ за сите } x, y \in \mathbb{R},$$

каде $p(x,y)$ е густината на распределба на случајниот вектор (X,Y).

- **Теорема.** Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_m)$ е случаен вектор и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е Борелова функција (т.е. за секое Борелово множество $B \in \mathcal{B}^n$ важи $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^m$). Тогаш, секоја векторско вредносна функција

$$Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n) = f(X_1, X_2, ..., X_m) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

е исто така случаен вектор.

- **Теорема.** Ако X и Y се независни случајни променливи од апсолутно непрекинат тип со густини на распределба $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ соодветно, тогаш $X+Y$ е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип со густина на распределба

$$p_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \cdot p_Y(u-x)\, dx. \tag{4.22}$$

Формулата (4.22) е позната како **формула на конволуционен производ**.

4.21. Даден е законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) со следната табела

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$a/3$	$a/3$	$1/36$
1	$2/9$	$2/9$	$a/6$
2	$1/9$	$a/3$	$a/12$

а) Определи ја вредноста на $a \in \mathbb{R}$.

б) Најди ги маргиналните закони на распределба на X и Y.

в) Најди ги веројатностите $P\{X = 1, Y < 1\}$, $P\{X < 2, Y > 1\}$ и $P\{X < 0, Y > 0\}$.

г) Испитај ја независноста на случајните променливи X и Y.

Решение. а) Ако означиме со $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $x_i \in \{0,1,2\}$, $y_j = \{0,1,2\}$, тогаш од $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ имаме

$$\frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{1}{36} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{a}{6} + \frac{1}{9} + \frac{a}{3} + \frac{a}{12} = 1,$$

од каде се добива дека $a = \frac{1}{3}$, па табелата со законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$1/9$	$1/9$	$1/36$
1	$2/9$	$2/9$	$1/18$
2	$1/9$	$1/9$	$1/36$

б) Маргиналниот закон на распределба на X е (се собираат веројатностите по редици)

$$\begin{aligned}
P\{X=0\} &= P\{X=0,Y=0\} + P\{X=0,Y=1\} + P\{X=0,Y=2\} = \\
&= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{1}{4}, \\
P\{X=1\} &= P\{X=1,Y=0\} + P\{X=1,Y=1\} + P\{X=1,Y=2\} = \\
&= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2}, \\
P\{X=2\} &= P\{X=2,Y=0\} + P\{X=2,Y=1\} + P\{X=2,Y=2\} = \\
&= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Маргиналниот закон на распределба на Y е (се собираат веројатностите по колони)

$$\begin{aligned}
P\{Y=0\} &= P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=2,Y=0\}= \\
&= \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}, \\
P\{Y=1\} &= P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=1\}= \\
&= \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}, \\
P\{Y=2\} &= P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=2\}= \\
&= \frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

в) $P\{X=1,Y<1\}=P\{X=1,Y=0\}=2/9$,
$P\{X<2,Y>1\}=P\{X\in\{0,1\},Y=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=2\}=1/36+1/18=1/12$,
$P\{X<0,Y>0\}=0$.

г) Случајните променливи X и Y се независни ако

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},\ x_i\in\{0,1,2\},\ y_j=\{0,1,2\}.$$

Со директна проверка, се покажува дека секое од 9-те равенства е точно (на пример, $P\{X=1,Y=2\}=1/18=(1/2)\cdot(1/9)=P\{X=1\}P\{Y=2\}$ е едно од 9-те равенства), односно X и Y се независни случајни променливи.

4.22. Од две монети едната е исправна, а другата има на двете страни "грб". На случаен начин се избира една монета и се фрла два пати. Нека $X=I_A$, каде A - избрана е исправната монета, а Y е број на паднати "грбови" при фрлање на избраната монета. Најди го законот за распределба на случајниот вектор (X,Y).

Решение. Случајните променливи X и Y ги примаат вредностите $X\in\{0,1\}$ и $Y=\{0,1,2\}$ соодветно. Распределбата на случајниот вектор (X,Y) ќе ја бараме со помош на условни веројатности, затоа што исходот од фрлањето на монетата ("пара" или "грб") зависи од изборот на монетата (исправна т.е. $X=1$ или неисправна т.е. $X=0$). При тоа, ако сме ја избрале неисправната монета, сигурно ќе се паднат два "грба" т.е. $P\{Y=2|X=0\}=1$, односно невозможно е да не се паднат "грбови" или да се падне еден "грб" т.е. $P\{Y=0|X=0\}=P\{Y=1|X=0\}=0$. Ако сме ја избрале исправната монета, тогаш условната распределба на Y при услов $X=1$ се поистоветува со распределбата одредена во Задача 4.4. Прво, распределбата на $X=I_A$ е

$$P\{X=1\}=P\{I_A=1\}=P(A)=\frac{1}{2},\ P\{X=0\}=P\{I_A=0\}=1-P(A)=\frac{1}{2}.$$

Сега, распределбата на (X, Y) е

$$\begin{aligned}
P\{X=0,Y=0\} &= P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0,\\
P\{X=0,Y=1\} &= P\{X=0\}P\{Y=1|X=0\} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0,\\
P\{X=0,Y=2\} &= P\{X=0\}P\{Y=2|X=0\} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2},\\
P\{X=1,Y=0\} &= P\{X=1\}P\{Y=0|X=1\} = \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8},\\
P\{X=1,Y=1\} &= P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\} = \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},\\
P\{X=1,Y=2\} &= P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\} = \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

или со табела

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	1/2
1	1/8	1/4	1/8

4.23. Нека X и Y се независни случајни променливи со закони на распределба дадени со табелите

x	0	1	2	3
$P\{X=x\}$	0,2	0,3	0,4	0,1

y	1	3	4
$P\{Y=y\}$	0,7	0,2	0,1

Најди ги распределбите на случајните променливи $U = \min\{X, Y\}$ и $V = X+Y$.

Решение. Од независноста на X и Y имаме дека

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},\ x_i \in \{0,1,2,3\},\ y_j = \{1,3,4\},$$

од каде распределбата на случајниот вектор (X, Y) е

$X \backslash Y$	1	3	4
0	0,14	0,04	0,02
1	0,21	0,06	0,03
2	0,28	0,08	0,04
3	0,07	0,02	0,01

Случајните променливи $U = \min\{X, Y\}$ и $V = X + Y$ примаат вредности $U \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ соодветно. Распределбата на U е

$$\begin{aligned}
P\{U = 0\} &= P\{\min\{X, Y\} = 0\} = P\{(X, Y) \in \{(0, 1), (0, 3), (0, 4)\}\} = \\
&= 0,14 + 0,04 + 0,02 = 0,20, \\
P\{U = 1\} &= P\{\min\{X, Y\} = 1\} = P\{(X, Y) \in \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1)\}\} = \\
&= 0,21 + 0,06 + 0,03 + 0,28 + 0,07 = 0,65, \\
P\{U = 2\} &= P\{\min\{X, Y\} = 2\} = P\{(X, Y) \in \{(2, 3), (2, 4)\}\} = 0,08 + 0,04 = 0,12, \\
P\{U = 3\} &= P\{\min\{X, Y\} = 3\} = P\{(X, Y) \in \{(3, 3), (3, 4)\}\} = 0,02 + 0,01 = 0,03.
\end{aligned}$$

Слично, се добива дека распределбата на V е

v	1	2	3	4	5	6	7
$P\{V = v\}$	0,14	0,21	0,32	0,15	0,11	0,06	0,01

4.24. Еден експеримент се состои од 2 фрлања на коцка. Го означуваме со w_{ij} елементарниот настан дека при првото фрлање се паднале i точки, а при второто фрлање се паднале j точки. Случајните променливи X и Y се дефинирани со

$$X(w_{ij}) = i + j \text{ и } Y(w_{ij}) = \left[\frac{i}{6}\right] + \left[\frac{j}{6}\right],$$

каде $[\cdot]$ е цел дел.

а) Најди ги законите на распределба на X и Y, а потоа и законот на распределба на $U = X - 6Y$.

б) Најди ги веројатностите $P\{X \leq 3\}$, $P\{\frac{1}{2} \leq Y \leq 7\}$ и $P\{U = 6|Y \leq 1\}$.

Решение. За елементарните настани w_{ij} имаме дека $P\{w_{ij}\} = 1/36$, $i = 1, 2, ..., 6$, $j = 1, 2, ..., 6$ (бидејќи $|\Omega| = 6^2 = 36$ и секој елементарен настан е еднакво веројатен).

а) Случајната променлива X е збирот на паднатите точки на двете коцки и таа прима вредности $X \in \{2, 3, ..., 12\}$ со веројатности

$$\begin{aligned}
P\{X = 2\} &= P\{w_{11}\} = 1/36, \\
P\{X = 3\} &= P\{w_{12}, w_{21}\} = 2/36, \\
P\{X = 4\} &= P\{w_{13}, w_{22}, w_{31}\} = 3/36 \text{ и.т.н.}
\end{aligned}$$

или со табела

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P\{X = x\}$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Случајната променлива Y е вкупен број на паднати 6-ки на двете коцки и таа прима вредности $Y = \{0, 1, 2\}$ со веројатности

$$\begin{aligned}
P\{Y=0\} &= P\{w_{ij} | i,j \in \{1,...,5\}\} = 25/36,\\
P\{Y=1\} &= P(\{w_{6j} | j \in \{1,...,5\}\} \cup \{w_{i6} | i \in \{1,...,5\}\}) = 10/36,\\
P\{Y=2\} &= P\{w_{66}\} = 1/36.
\end{aligned}$$

Распределбата на случајниот вектор (X, Y) е

$$\begin{aligned}
P\{X=2, Y=0\} &= P\{w_{11}\} = 1/36,\\
P\{X=2, Y=1\} &= P(\emptyset) = 0,\\
P\{X=2, Y=2\} &= P(\emptyset) = 0,\\
&\vdots\\
P\{X=7, Y=0\} &= P\{w_{25}, w_{34}, w_{43}, w_{52}\} = 4/36,\\
P\{X=7, Y=1\} &= P\{w_{16}, w_{61}\} = 2/36,\\
P\{X=7, Y=2\} &= P(\emptyset) = 0,\\
&\vdots\\
P\{X=12, Y=0\} &= P(\emptyset) = 0,\\
P\{X=12, Y=1\} &= P(\emptyset) = 0,\\
P\{X=12, Y=2\} &= P\{w_{66}\} = 1/36,
\end{aligned}$$

или со табела

$X \backslash Y$	0	1	2
2	1/36	0	0
3	2/36	0	0
4	3/36	0	0
5	4/36	0	0
6	5/36	0	0
7	4/36	2/36	0
8	3/36	2/36	0
9	2/36	2/36	0
10	1/36	2/36	0
11	0	2/36	0
12	0	0	1/36

Сега, според вредностите кои ги примаат X и Y, случајната променлива $U = X - 6Y$ треба да ги прима вредностите $U \in \{-10, -9, ..., 12\}$, но со оглед на распределбата на случајниот вектор (X, Y) и нултите веројатности во соодветната табела имаме дека $P\{U = u\} = 0$, $u \in \{-10, -9, ..., -1\} \cup \{11, 12\}$. Имено, случајната променлива U е збирот на паднатите точки на двете коцки не сметајќи ги паднатите 6-ки. Распределбата на U е

$$\begin{aligned}
P\{U=0\} &= P\{X-6Y=0\} = P\{X=6Y\} = \\
&= P\{(X,Y)=(12,2)\} = 1/36, \\
P\{U=1\} &= P\{X-6Y=1\} = P\{X=6Y+1\} \\
&= P\{(X,Y)=(7,1)\} = 2/36, \\
P\{U=2\} &= P\{X-6Y=2\} = P\{X=6Y+2\} \\
&= P\{(X,Y)\in\{(2,0),(8,1)\}\} = 1/36+2/36 = 3/36, \text{ и.т.н}
\end{aligned}$$

или со табела

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P\{U=u\}$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

б) $P\{X\le 3\} = P\{X\in\{2,3\}\} = 1/36+2/36 = 3/36$,
$P\{\frac{1}{2}\le Y\le 7\} = P\{Y\in\{1,2\}\} = 10/36+1/36 = 11/36$,
$P\{U=6|Y\le 1\} = P\{X-6Y=6|Y\in\{0,1\}\} = \frac{P\{X-6Y=6,\, Y\in\{0,1\}\}}{P\{Y\in\{0,1\}\}} =$
$= \frac{P\{(X,Y)\in\{(6,0),(12,1)\}\}}{P\{Y\in\{0,1\}\}} = \frac{5/36+0}{25/36+10/36} = \frac{1}{7}$.

4.25. Случајната променлива X има Поасонова распределба $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda>0$. Најди ја распределбата на случајната променлива X при услов $X>0$.

Решение. Ако $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$, тогаш распределбата на X е

$$P\{X=x\} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\ x=0,1,2,...$$

Бараната условна распределба на X при услов $X>0$ е

$$\begin{aligned}
P\{X=x|X>0\} &= \frac{P\{X=x,X>0\}}{P\{X>0\}} = \frac{P\{X=x\}}{1-P\{X=0\}} = \\
&= \frac{\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}}{1-\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^x}{x!\,(e^{\lambda}-1)},\ x=1,2,... \\
P\{X=0|X>0\} &= \frac{P\{X=0,X>0\}}{P\{X>0\}} = \frac{P(\emptyset)}{P\{X>0\}} = 0.
\end{aligned}$$

4.26. Густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е

$$p(x,y) = \begin{cases} c(r-\sqrt{x^2+y^2}) & ,x^2+y^2\le r^2 \\ 0 & ,x^2+y^2>r^2 \end{cases},$$

каде $r\ge 0$ и c се константи. Определи ја вредноста на c, а потоа и веројатноста дека точката (X,Y) ќе падне во кругот $x^2+y^2\le a$, $a\ge 0$.

Решение. Од $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\;dx\;dy = 1$, имаме $\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} c(r-\sqrt{x^2+y^2})\;dx\;dy = 1$, од каде со премин во поларини координати $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ добиваме

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r c(r-\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi})\rho\;d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r c(r-\rho)\rho\;d\rho = \frac{cr^3}{6}\cdot 2\pi, \end{aligned}$$

од каде $c=\frac{3}{r^3\pi}$, односно густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е $p(x,y)=\frac{3}{r^3\pi}(r-\sqrt{x^2+y^2})$, $x^2+y^2\le r^2$. Бараната веројатност е

$$\begin{aligned} P\{X^2+Y^2\le a\} &= \iint\limits_{x^2+y^2\le a} p(x,y)\;dx\;dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{a}} \frac{3}{r^3\pi}(r-\rho)\rho\;d\rho = \frac{a}{r^3}(3r-2\sqrt{a}), \end{aligned}$$

за $a<r^2$ и $P\{X^2+Y^2\le a\}=1$ за $a\ge r^2$.

4.27. Случајниот вектор (X,Y) е рамномерно распределен во правоаголникот $\{(x,y)|-1\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$. Најди ги густината на распределба $p(x,y)$ и функцијата на распределба $F(x,y)$ на (X,Y), а потоа најди ги веројатностите $P\{X<-\frac{1}{2}, Y<\frac{5}{2}\}$ и $P\{Y\le |X-\frac{1}{2}|\}$. Најди ги маргиналните распределби на X и Y соодветно. Дали X и Y се независни случајни променливи?

Решение. Случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на правоаголникот $\Pi=\{(x,y)|-1\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$, што значи дека густината на распределба на (X,Y) е

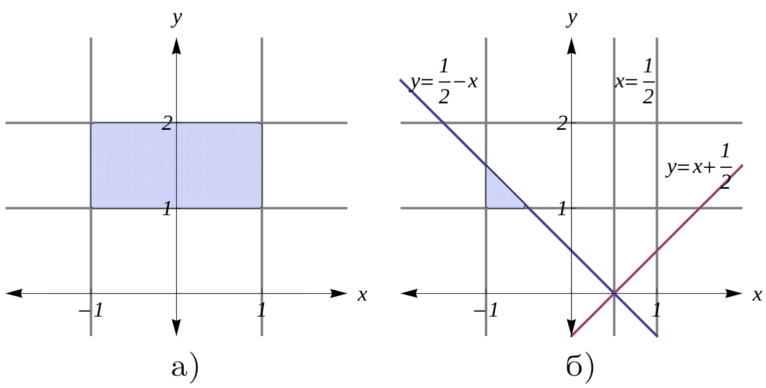
$$p(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{m(\Pi)} & ,(x,y)\in\Pi \\ 0 & ,(x,y)\notin\Pi \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2} & ,(x,y)\in\Pi \\ 0 & ,(x,y)\notin\Pi \end{array}\right. ,$$

каде $m(\Pi)$ е плоштината на правоаголникот Π, види Цртеж 4.2 а).

За функцијата на распределба имаме $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\;du\;dv$, односно
за $x\le -1$ или $y\le 1$, $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0\;du\;dv = 0$,
за $-1<x\le 1$, $1<y\le 2$, $F(x,y)=\int_{-1}^{x}\int_{1}^{y}\frac{1}{2}\;du\;dv=\frac{1}{2}(x+1)(y-1)$,
за $x>1$, $1<y\le 2$, $F(x,y)=\int_{-1}^{1}\int_{1}^{y}\frac{1}{2}\;du\;dv = y-1$,
за $-1<x\le 1$, $y>2$, $F(x,y)=\int_{-1}^{x}\int_{1}^{2}\frac{1}{2}\;du\;dv=\frac{1}{2}(x+1)$,
за $x>1$, $y>2$, $F(x,y)=\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}\frac{1}{2}\;du\;dv=1$,
или

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & ,x\le -1 \text{ или } y\le 1\\ \frac{1}{2}(x+1)(y-1) & ,-1<x\le 1,\ 1<y\le 2\\ y-1 & ,x>1,\ 1<y\le 2\\ \frac{1}{2}(x+1) & ,-1<x\le 1,\ y>2\\ 1 & ,x>1,\ y>2\end{cases}$$

Бараните веројатности се $P\{X<-\frac{1}{2},Y<\frac{5}{2}\}=F(-\frac{1}{2},\frac{5}{2})=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{4}$, $P\{Y\le|X-\frac{1}{2}|\}=P\{X\ge\frac{1}{2},Y\le X-\frac{1}{2}\}+P\{X<\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}-X\}=$ $=0+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}dx\int_{1}^{\frac{1}{2}-x}\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{16}$, види Цртеж 4.2 б).



Цртеж 4.2: Цртежи за задачата 4.27

Маргиналните распределби на X и Y соодветно се

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy=\int_{1}^{2}\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2}\cdot y|_1^2=\frac{1}{2},\ -1<x<1,$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot x|_{-1}^{1}=1,\ 1<y<2,$$

од каде заклучуваме дека $X\sim\mathcal{U}(-1,1)$ и $Y\sim\mathcal{U}(1,2)$. И бидејќи $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$ за секои $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, следи дека X и Y се независни случајни променливи.

4.28. Случајниот вектор (X,Y,Z) има густина на распределба $p(x,y,z)=\frac{3}{4\pi}$, за $x^2+y^2+z^2\le 1$. Најди ги веројатностите

а) $P\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\}$,

б) $P\{-\frac{1}{\sqrt{3}}<X<\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}<Y<\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}<Z<\frac{1}{\sqrt{3}}\}$,

в) $P\{X^2+Y^2+Z^2\le\frac{1}{2}\}$.

Решение. а) Маргиналната густина на распределба на X е

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y,z)\,dy\,dz = \iint\limits_{y^2+z^2\leq 1-x^2} \frac{3}{4\pi}\,dy\,dz =$$
$$= \frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \rho\,d\rho = \frac{3}{4}(1-x^2),\ -1\leq x\leq 1,$$

од каде за веројатноста имаме

$$P\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_X(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{33}{48} = 0,6875.$$

б) $P\{-\frac{1}{\sqrt{3}} < X < \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} < Y < \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} < Z < \frac{1}{\sqrt{3}}\} =$
$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} p(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{4\pi}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dy \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dz = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0,36755.$

в) $P\{X^2+Y^2+Z^2 \leq \frac{1}{2}\} = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq\frac{1}{2}} p(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$
$= \frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\rho \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-\rho^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-\rho^2}} \rho\,dz = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, при што тројниот интеграл е пресметан со премин во цилиндрични координати $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$.

4.29. Независно се избираат два броја X и Y од интервалот $[0,1]$ со рамномерна густина на распределба. Најди ги веројатностите $P\{X+Y<1/2\}$, $P\{|X-Y|<1/2\}$, $P\{\max\{X,Y\}<1/2\}$ и $P\{\min\{X,Y\}<1/2\}$.

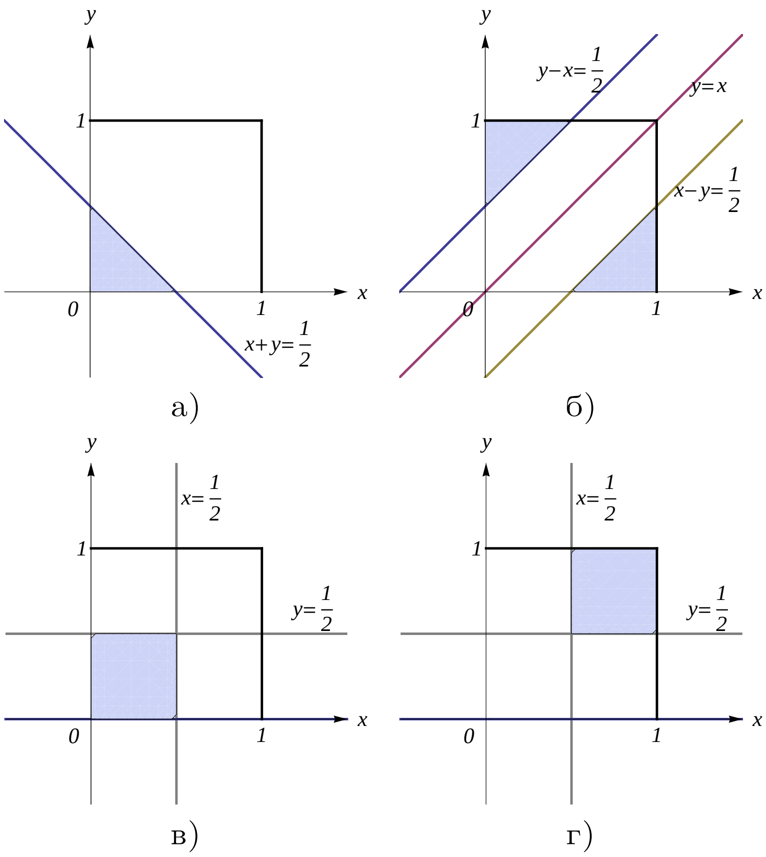
Решение. Дадено е дека $X\sim\mathcal{U}[0,1]$ и $Y\sim\mathcal{U}[0,1]$, и при тоа тие се независни случајни променливи, што значи дека густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) е $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=1,\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1$, од каде $(X,Y)\sim\mathcal{U}(\Pi)$, каде $\Pi=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$. Тогаш,

$P\{X+Y<\frac{1}{2}\} = \iint\limits_{x+y<\frac{1}{2}} p(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}-x} dy = \frac{1}{8}$, види Цртеж 4.3 а).

$P\{|X-Y|<\frac{1}{2}\} = 1-P\{|X-Y|\geq\frac{1}{2}\} =$
$= 1-P\{X\geq Y,\ X-Y\geq\frac{1}{2}\}-P\{X<Y,\ Y-X\geq\frac{1}{2}\} =$
$= 1-\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x+\frac{1}{2}}^1 dy - \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{x-\frac{1}{2}} dy = \frac{3}{4}$, види Цртеж 4.3 б), каде штрафираниот дел одговара на спротивниот настан.

$P\{\max\{X,Y\}<\frac{1}{2}\} = P\{X<\frac{1}{2},\ Y<\frac{1}{2}\} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{4}$, види Цртеж 4.3 в).

$P\{\min\{X,Y\}<\frac{1}{2}\} = 1-P\{\min\{X,Y\}\geq\frac{1}{2}\} = 1-P\{X\geq\frac{1}{2},\ Y\geq\frac{1}{2}\} =$
$= 1-\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{2}}^1 dy = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, види Цртеж 4.3 г), каде штрафираниот дел одговара на спротивниот настан.



Цртеж 4.3: Цртежи за задачата 4.29

4.30. Случајните променливи X и Y се независни со стандардни нормални распределби. Најди ги распределбите на случајните променливи

а) $U_1 = X + Y$,

б) $U_2 = X^2 + Y^2$,

в) $U_3 = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Решение. Дадено е дека $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, па нивните густини на распределба се $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ и $p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$ соодветно.

а) Од X и Y независни случајни променливи, според формулата за конволуционен производ, за густината на распределба на U_1 имаме

$$\begin{aligned} p_{U_1}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y(u-x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(u-x)^2}{2}}\, dx = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}},\ u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

при што ставена е смена $t = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x - u)$ и искористено е дека $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$.

б) Ако $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, тогаш случајната променлива X^2 има густина на распределба

$$p_{X^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, p_X(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-\frac{x}{2}},\ x > 0 \text{ (покажи!)}$$

На сличен начин се добива $p_{Y^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\, e^{-\frac{y}{2}},\ y > 0$. Од X и Y независни случајни променливи, следува дека X^2 и Y^2 се независни случајни променливи, па густината на распределба на U_2 може да ја добиеме според формулата за конволуционен производ,

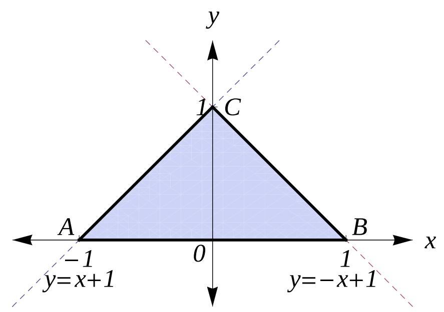
$$p_{U_2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X^2}(x) p_{Y^2}(u-x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{x(u-x)}}\, e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{u-x}{2}} dx = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{u}{2}},\ u > 0.$$

в) Имаме дека $U_3 = \sqrt{U_2}$, па нејзината густина на распределба е

$$p_{U_3}(u) = 2u \cdot p_{U_2}(u^2) = 2z \cdot \frac{1}{2}\, e^{-\frac{u^2}{2}} = u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}},\ u > 0.$$

4.31. Случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на триаголникот со темиња $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и $C(0,1)$. Најди ги распределбите на случајните променливи $U = \min\{X,Y\}$ и $V = \max\{X,Y\}$.

Решение. Го означуваме со T триаголникот со темиња $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и $C(0,1)$. Неговата плоштина е $m(T) = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1$, па затоа густината на распределба на случајниот вектор (X,Y) кој е рамномерно распределен на триаголникот T е $p(x,y) = 1,\ (x,y) \in T$ (Цртеж 4.4).



Цртеж 4.4: Цртеж за задачата 4.31

Функцијата на распределба на $U=\min\{X,Y\}$ е следната

$$
\begin{aligned}
F_U(u) &= P\{U<u\}=P\{\min\{X,Y\}<u\}= \\
&= 1-P\{\min\{X,Y\}\geq u\}=1-P\{X\geq u,\ Y\geq u\}= \\
&= \begin{cases} 1-1 & ,u\leq -1 \\ \int_{-1}^{u}dx\int_0^{x+1}dy & ,-1<u\leq 0 \\ 1-\int_u^{1-u}dx\int_u^{-x+1}dy & ,0<u\leq \frac{1}{2} \\ 1-0 & ,u>\frac{1}{2} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 0 & ,u\leq -1 \\ \frac{u^2}{2}+u+\frac{1}{2} & ,-1<u\leq 0 \\ -2u^2+2u+\frac{1}{2} & ,0<u\leq \frac{1}{2} \\ 1 & ,u>\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

При тоа, кога $-1<u\leq 0$ искористено е
$1-P\{X\geq u,\ Y\geq u\}=\iint\limits_{(x,y)\in T}dx\,dy-\iint\limits_{(x,y)\in T,\ x\geq u,\ y\geq u}dx\,dy=\iint\limits_{(x,y)\in T,\ x<u}dx\,dy.$
Тогаш, густината на распределба на $U=\min\{X,Y\}$ е

$$
p_U(u)=F_U'(u)=\begin{cases} u+1 & ,-1<u\leq 0 \\ -4u+2 & ,0<u\leq \frac{1}{2} \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}
$$

Слично, функцијата на распределба на $V=\max\{X,Y\}$ е

$$
\begin{aligned}
F_V(v) &= P\{V<v\}=P\{\max\{X,Y\}<v\}=P\{X<v,\ Y<v\}= \\
&= \begin{cases} 0 & ,v\leq 0 \\ \int_0^v dy\int_{y-1}^{v}dx & ,0<v\leq \frac{1}{2} \\ 1-\int_v^1 dx\int_0^{-x+1}dy-\int_v^1 dy\int_{y-1}^{-y+1}dx & ,\frac{1}{2}<v\leq 1 \\ 1 & ,u>1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 0 & ,v\leq 0 \\ \frac{v^2}{2}+v & ,0<v\leq \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}v^2+3v-\frac{1}{2} & ,\frac{1}{2}<v\leq 1 \\ 1 & ,u>1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

При тоа, кога $\frac{1}{2}<u\leq 1$ искористено е
$P\{X<v,\ Y<v\}=\iint\limits_{(x,y)\in T,\ x<v,\ y<v}dx\,dy=\iint\limits_{(x,y)\in T}dx\,dy-\iint\limits_{(x,y)\in T,\ x\geq v}dx\,dy-\iint\limits_{(x,y)\in T,\ y\geq v}dx\,dy.$
Тогаш, густината на распределба на $V=\max\{X,Y\}$ е

$$
p_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases} v+1 & ,0<v\leq \frac{1}{2} \\ -3v+3 & ,\frac{1}{2}<v\leq 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}
$$

4.32. Случајниот вектор (X, Y) има $\mathcal{N}(0, 0, \sigma^2, \sigma^2, 0)$ распределба. Нека $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$ и $V = \frac{X}{Y}$. Најди ја густината на распределба на случајниот вектор (U, V). Дали U и V се независни случајни променливи?

Решение. Ако $(X, Y) \sim \mathcal{N}(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, тогаш густината на распределба на (X, Y) е

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sqrt{1 - \rho^2}}\ e^{-\frac{1}{2\cdot(1-\rho^2)}\ ((\frac{x-m_1}{\sigma_1})^2 - 2\cdot\rho\cdot\frac{x-m_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-m_2}{\sigma_2} + (\frac{y-m_2}{\sigma_2})^2)},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

па за $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\rho = 0$, имаме дека

$$p_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Со решавање на системот $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \frac{x}{y}$ по x и y, добиваме $x = \pm\frac{uv}{\sqrt{1+v^2}}$, $y = \pm\frac{u}{\sqrt{1+v^2}}$, па за Јакобијанот на трансформацијата се добива

$$J(u, v) = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left|\begin{array}{cc} \pm\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} & \pm\frac{u}{(\sqrt{1+v^2})^3} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} & \mp\frac{uv}{(\sqrt{1+v^2})^3} \end{array}\right| = -\frac{u}{1 + v^2}.$$

Тогаш, густината на распределба на (U, V) е

$$\begin{aligned} p_{UV}(u, v) &= p_{XY}(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| = p_{XY}(\pm\frac{uv}{\sqrt{1 + v^2}}, \pm\frac{u}{\sqrt{1 + v^2}}) \cdot | - \frac{u}{1 + v^2}| = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{u^2v^2}{1+v^2} + \frac{u^2}{1+v^2})} \cdot \frac{|u|}{1 + v^2} = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{|u|}{1 + v^2},\ (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Маргиналните густини на распределба на U и V соодветно се

$$p_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{UV}(u, v)\ dv = \frac{|u|}{2\pi\sigma^2}\ e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + v^2}\ dv = \frac{|u|}{2\sigma^2}\ e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}},\ u \in \mathbb{R},$$

$$p_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{UV}(u, v)\ du = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \frac{1}{1 + v^2} \int_{-\infty}^{\infty} |u|\ e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\ du = \frac{1}{\pi(1 + v^2)},\ v \in \mathbb{R}.$$

Бидејќи

$$p_U(u)p_V(v) = \frac{|u|}{2\sigma^2}\ e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\pi(1 + v^2)} = p_{UV}(u, v),\ \text{за сите } (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

следи дека U и V се независни случајни променливи.

4.33. Густината на распределба на случајниот вектор (X, Y) е дадена со

$$p(x,y) = \begin{cases} axye^{-(x^2+y^2)} & , x > 0,\ y > 0 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}$$

Определи ја вредноста на a, маргиналните распределби на X и Y, соодветно и условните густини на распределба на X и Y при услов $Y = y$ и $X = x$ соодветно. Дали X и Y се независни случајни променливи?

Решение. Од $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx\,dy = 1$ имаме

$$1 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} axye^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = a\left(\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx\right)^2 = a\,\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

од каде добиваме дека $a = 4$, што значи дека густината н араспределба на (X, Y) е

$$p(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & , x > 0,\ y > 0 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}$$

Маргиналните густини на распределба на X и Y соодветно се

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} 4xye^{-(x^2+y^2)}\,dy = 4xe^{-x^2}\int_0^{\infty} ye^{-y^2}\,dy = \\ &= 4xe^{-x^2}\cdot\frac{1}{2} = 2xe^{-x^2},\ x > 0, \end{aligned}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx = 2ye^{-y^2},\ y > 0.$$

И бидејќи

$$p_X(x)p_Y(y) = 2xe^{-x^2}\cdot 2ye^{-y^2} = 4xye^{-(x^2+y^2)} = p(x,y),\ x > 0,\ y > 0,$$

додека пак за $x \leq 0$ или $y \leq 0$, имаме дека $p_X(x)p_Y(y) = 0 = p(x,y)$, што значи дека $p_X(x)p_Y(y) = p(x,y)$, за сите $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Следи дека X и Y се независни случајни променливи.

Условниот закон на распределба на X при услов $Y = y$ $(y > 0)$ е

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{4xye^{-(x^2+y^2)}}{2ye^{-y^2}} = 2xe^{-x^2},\ x > 0,$$

додека пак условниот закон на распределба на Y при услов $X = x$ $(x > 0)$ е

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{4xye^{-(x^2+y^2)}}{2xe^{-x^2}} = 2ye^{-y^2},\ y > 0.$$

4.34. Нека $p(x,y,z) = \frac{1}{8}\, e^{-|x|-|y|-|z|}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ е густина на распределба на случајниот вектор (X,Y,Z). Определи ја условната густина на распределба на (X,Y) при услов $Z = z$ и условната густина на распределба на X при услов $(Y,Z) = (y,z)$. Дали X, Y и Z се независни (во целина) случајни променливи?

Решение. Маргиналната густина на распределба на Z е

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y,z)\,dx\,dy = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-|y|-|z|}\,dy = \\ &= \frac{1}{8}\, e^{-|z|}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx\right)^2 = \frac{1}{8}\, e^{-|z|}\cdot 2^2 = \frac{1}{2}\, e^{-|z|},\ z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и тогаш условната густина на распределба на (X,Y) при услов $Z = z$ е

$$p(x,y|z) = \frac{p(x,y,z)}{p_Z(z)} = \frac{\frac{1}{8}\, e^{-|x|-|y|-|z|}}{\frac{1}{2}\, e^{-|z|}} = \frac{1}{4}\, e^{-|x|-|y|},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Потоа, маргиналната густина на распределба на (Y,Z) е

$$\begin{aligned} p_{YZ}(y,z) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y,z)\,dx = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-|y|-|z|}\,dx = \frac{1}{8}\, e^{-|y|-|z|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx \\ &= \frac{1}{8}\, e^{-|y|-|z|}\cdot 2 = \frac{1}{4}\, e^{-|y|-|z|},\ (y,z) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

па условната густина на распределба на X при услов $(Y,Z) = (y,z)$ е

$$p(x|y,z) = \frac{p(x,y,z)}{p_{YZ}(y,z)} = \frac{\frac{1}{8}\, e^{-|x|-|y|-|z|}}{\frac{1}{4}\, e^{-|y|-|z|}} = \frac{1}{2}\, e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Слично како маргиналната густина на распределба на Z, се добиваат и маргиналните густини на распределба на X и Y соодветно т.е.

$$p_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}, \quad p_Y(y) = \frac{1}{2}\, e^{-|y|},\ y \in \mathbb{R}.$$

Тогаш од

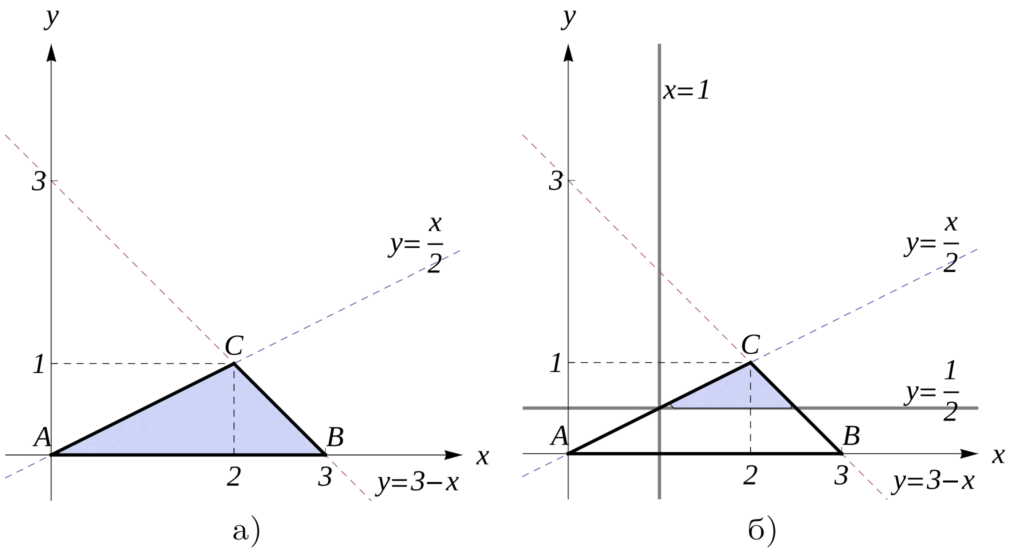
$$p_X(x)p_Y(y)p_Z(z) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}\cdot\frac{1}{2}\, e^{-|y|}\cdot\frac{1}{2}\, e^{-|z|} = \frac{1}{8}\, e^{-|x|-|y|-|z|} = p(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

следи дека X, Y, Z се независни случајни промеливи.

4.35. Случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба во внатрешноста на триаголникот T со темиња $A(0,0)$, $B(3,0)$ и $C(2,1)$. Најди ја условната распределба на Y при услов $X \in (1,2)$ и условната распределба на Y при услов $X \in (2,3)$. Најди ја веројатноста $P\{X \geq 1, Y \geq \frac{1}{2}\}$.

Решение. Плоштината на триаголникот T е $m(T) = \frac{3\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$, види Цртеж 4.5 а), па густината на распределба на (X,Y) е

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(T)} & ,(x,y)\in T \\ 0 & ,(x,y)\notin T \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3} & ,(x,y)\in T \\ 0 & ,(x,y)\notin T \end{cases}$$



Цртеж 4.5: Цртежи за задачата 4.35

Маргиналната густина на распределба на X е

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{2}{3}\,dy & ,0<x\le 2 \\ \int_0^{3-x} \frac{2}{3}\,dy & ,2<x\le 3 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{3} & ,0<x\le 2 \\ \frac{2}{3}(3-x) & ,2<x\le 3 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

Тогаш, условната густина на распределба на Y при услов $X\in(1,2)$ е

$$p_Y(y|X\in(1,2)) = \frac{\int\limits_{(x,y)\in T,\ x\in(1,2)} p(x,y)\,dx}{\int\limits_{x\in(1,2)} p_X(x)\,dx} = \begin{cases} \frac{\int_1^2 \frac{2}{3}\,dx}{\int_1^2 \frac{x}{3}\,dx} & ,0<y\le\frac{1}{2} \\ \frac{\int_{2y}^2 \frac{2}{3}\,dx}{\int_1^2 \frac{x}{3}\,dx} & ,\frac{1}{2}<y\le 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{3} & ,0<y\le\frac{1}{2} \\ \frac{8}{3}(1-y) & ,\frac{1}{2}<y\le 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

Аналогно, условната густина на распределба на Y при услов $X \in (2,3)$ е

$$p_Y(y|X \in (2,3)) = \frac{\int\limits_{(x,y)\in T,\, x\in(2,3)} p(x,y)\,dx}{\int\limits_{x\in(2,3)} p_X(x)\,dx} = \begin{cases} \frac{\int_2^{3-y} \frac{2}{3}\,dx}{\int_2^3 \frac{2}{3}(3-x)\,dx} & ,0 < y \le 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2(1-y) & ,0 < y \le 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

Потоа, види Цртеж 4.5 б),

$$P\{X \ge 1, Y \ge \frac{1}{2}\} = \iint\limits_{(x,y)\in T,\, x\ge 1,\, y\ge\frac{1}{2}} p(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{2y}^{3-y} \frac{2}{3}\,dx = \frac{1}{4}.$$

4.36. Нека X и Y се независни случајни променливи со $\mathcal{U}(0,1)$ распределби. Покажи дека и X при услов $X+Y=z$, за $z \in (0,2)$, $z = const.$, има исто така рамномерна распределба.

Решение. Густините на распределба на $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ и $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ се

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} 1 & ,0 < y < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

соодветно. Потоа, од X и Y независни случајни променливи, густината на распредлба на случајниот вектор (X,Y) е

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} 1 & ,0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

или $(X,Y) \sim \mathcal{U}(\{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\})$.

Дефинираме нови случајни променливи $U = X$ и $V = X + Y$. За да ја најдеме густината на распределба на случајниот вектор (U,V), потребен ни е Јакобијанот на трансформацијата $x = u$, $y = v - u$, односно

$$J(u,v) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогаш, густината на распределба на (U,V) е (Цртеж 4.6)

$$p_{UV}(u,v) = p_{XY}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)| = p_{XY}(u, v-u) \cdot 1 =$$

$$= \begin{cases} 1 & ,0 < u < 1,\ 0 < v - u < 1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,0 < u < 1,\ u < v < u+1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

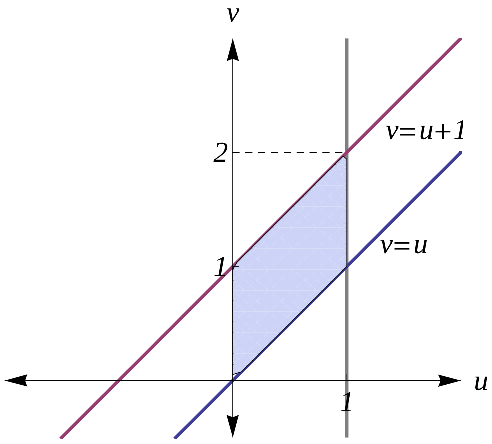
Густината на распределба на $V = X + Y$ ја бараме како маргинална густина на распределба т.е.

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(v) &= p_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{UV}(u,v)\,du = \\ &= \begin{cases} \int_0^v du & ,0 < v \le 1 \\ \int_{v-1}^1 du & ,1 < v < 2 \end{cases} = \int_{\max\{0,v-1\}}^{\min\{v,1\}} du,\ 0 < v < 2 = \\ &= \min\{v,1\} - \max\{0, v-1\},\ 0 < v < 2. \end{aligned}$$

Тогаш, условната густина на распределба на X при услов $X+Y = z$, $z \in (0,2)$ е

$$p_X(x|X+Y=z) = p_U(x|V=z) = \frac{p_{UV}(x,z)}{p_V(z)} = \frac{1}{\min\{z,1\} - \max\{0,z-1\}},$$

за $0 < x < 1$, $0 < z - x < 1$ т.е. $0 < x < 1$, $z - 1 < x < z$, од каде $\max\{0, z-1\} < x < \min\{z,1\}$. Значи, $X|X+Y = z \sim \mathcal{U}(\max\{0,z-1\}, \min\{z,1\})$.



Цртеж 4.6: Цртеж за задачата 4.36

4.4 Математичко очекување и други бројни карактеристики

Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е случајна променлива дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Нека P_X е закон на случајната променлива X и F_X е функција на распределба на X.

- **Математичко очекување** на X е **Лебеговиот интеграл**

$$EX = \int_\Omega X(w)P(dw) = \int_\Omega X dP.$$

- Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Тогаш, $f(X)$ е случајна променлива и за нејзиното математичко очекување важи

$$Ef(X) = \int_\Omega f(X)dP = \int_\mathbb{R} f(x)P_X(dx) = \int_\mathbb{R} f(x)dF_X(x).$$

Последниот интеграл е познат како **Лебег-Стилтјесов интеграл**.

- **Теорема.** Нека $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е случајна променлива и нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција.

  (а) Ако X е дискретна случајна променлива со закон на распределба $P\{X = x_i\} = p_i$, $i = 1, 2, ...$, и ако $\sum_i |f(x_i)|p_i < +\infty$, тогаш математичкото очекување на $f(X)$ постои како конечен број и се пресметува според

  $$Ef(X) = \sum_i f(x_i)p_i.$$

  (б) Ако X е апсолутно непрекината случајна променлива со густина на распределба p_X, и ако $\int_\mathbb{R} |f(x)|p_X(x)dx < +\infty$, тогаш математичкото очекување на $f(X)$ постои како конечен број и се пресметува според

  $$Ef(X) = \int_\mathbb{R} f(x)p_X(x)dx.$$

При специјални избори на функцијата f во последната Теорема добиваме:

- Ако $f(x) = x$ имаме дека $EX = \sum_i x_i p_i$ за дискретна случајна променлива, и $EX = \int_\mathbb{R} xp_X(x)dx$ за апсолутно непрекината случајна променлива.
- За $f(x) = x^k$ се добива **k-тиот момент** на X, односно EX^k.
- Ако EX постои и е конечно, тогаш $E(X - EX)^k$ е **k-тиот централен момент** на X.
- Вториот централен момент на X се нарекува **дисперзија** (или **варијанса**), и се означува со $DX = E(X-EX)^2$. Квадратниот корен од дисперзијата се нарекува **стандардна девијација**, и се означува со $\sigma = \sqrt{DX}$.

Математичките очекувања и другите бројни карактеристики за случајните променливи со поважни распределби, дадени се во Прилог В.

- **Својство.** Нека X и Y се случајни променливи, EX и EY постојат, и нека c е реален број. Тогаш,

  (а) $E(cX) = cEX$,

(б) ако $X(w) \leq Y(w)$ за секој $w \in \Omega$, тогаш $EX \leq EY$,

(в) $|EX| \leq E|X|$,

(г) $E(X+Y) = EX + EY$,

(д) ако X и Y се независни, тогаш $E(XY) = EXEY$,

(ѓ) $DX = E(X^2) - (EX)^2$,

(е) $DX \geq 0$,

(ж) $D(c) = 0$ и $D(cX) = c^2 DX$,

(з) ако X и Y се независни, тогаш $D(X+Y) = DX + DY$.

- Ако X е случајна променлива од дискретен тип, тогаш **мода** на X е вредноста moX која X ја прима со најглема веројатност, а **медијана** на X е онаа вредност meX за која се исполнети неравенствата $P\{X \leq meX\} \geq 0,5$ и $P\{X \geq meX\} \geq 0,5$.

  Ако X е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип, тогаш **мода** на X е вредноста moX во која густината на распределба $p_X(x)$ достигнува максимум т.е. $moX = \text{argmax}\ p_X(x)$, а **медијана** на X е онаа вредност meX во која функцијата на распределба $F_X(x)$ достигнува вредност $0,5$ т.е. $F_X(meX) = 0,5$.

Нека X и Y се случајни променливи со $0 < DX < +\infty$ и $0 < DY < +\infty$.

- **Коваријанса** на X и Y е бројот дефиниран со

$$cov(X,Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - EXEY.$$

- **Коефициент на корелација** на X и Y е бројот дефиниран со

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}.$$

- **Теорема.** Ако X и Y се независни, тогаш $cov(X,Y) = 0$ и $\rho(X,Y) = 0$.

- **Теорема.** За коефициентот на корелација важи $|\rho(X,Y)| \leq 1$.

Нека X и Y се две случајни променливи, при што $E|X| < +\infty$.

- **Условно математичко очекување** на X при услов Y е случајната променлива $E(X|Y)$ за која важи

$$E(Xg(Y)) = E(E(X|Y)g(Y)),$$

  за секоја ограничена (мерлива) функција $g(Y)$.

- Ако X и Y се дисктетни случајни променливи кои примаат вредности $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ и $\{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$ соодветно, тогаш $E(X|Y)$ е дискретна случајна променлива со закон на распределба

$$P\{E(X|Y) = E(X|Y = y_j)\} = P\{Y = y_j\},\ j = 1, 2, ...,$$

каде $E(X|Y = y_j)$ е математичкото очекување на X при услов $Y = y_j$ кое се пресметува со помош на условната распределба на X при услов $Y = y_j$, според

$$E(X|Y = y_j) = \sum_i x_i P\{X = x_i|Y = y_j\} = \sum_i x_i \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}.$$

- **Својство.** Нека X, X_1, X_2, Y и Z се случајни променливи, при што $E|X| < +\infty$, $E|X_1| < +\infty$, $E|X_2| < +\infty$. Тогаш,

  (а) $E(aX_1 + bX_2|Y) = aE(X_1|Y) + bE(X_2|Y)$, за секои $a, b \in \mathbb{R}$,

  (б) ако $X \geq 0$, тогаш $E(X|Y) \geq 0$,

  (в) ако X_1 е функција од Y, тогаш $E(X_1X_2|Y) = X_1E(X_2|Y)$,

  (г) ако X и Y се независни, тогаш $E(X|Y) = EX$,

  (д) ако Z е функција од Y, тогаш $E(E(X|Y)|Z) = E(X|Z)$,

  (е) $E(E(X|Y)) = EX$

  (ж) $E(a|Y) = a$, за секоја константа $a \in \mathbb{R}$,

  (з) ако $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е конвексна функција, тогаш

$$E(\varphi(X)) \geq \varphi(EX) \quad \text{и} \quad E(\varphi(X)|Y) \geq \varphi(E(X|Y)).$$

4.37. За случајните променливи X и Y, важи $Y = 2 - 3X$. Нека $EX = 2$ и $DX = 4$. Најди ги EY и DY.

Решение. $EY = E(2 - 3X) = 2 - 3EX = 2 - 3 \cdot 2 = -4$,
$DY = D(2 - 3X) = D(-3X) = (-3)^2 DX = 9 \cdot 4 = 36$.

4.38. Монета се фрла 7 пати. Нека X е број на појавувања на "грб" на монетата. Најди ги EX и DX.

Решение. Ако означиме со A - на монетата се појавил "грб", тогаш имаме Бернулиева шема со $n = 7$ и $p = P(A) = \frac{1}{2}$. Случајната променлива X ги прима вредностите $X \in \{0, 1, ..., 7\}$, а нејзината распределба е

$$P\{X = k\} = P(B_k) = \binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{7-k} = \binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7,\ k = 0, 1, ..., 7,$$

каде B_k - настанот A се реализирал точно k пати т.е. "грб" се појавил k пати. Тогаш, за математичкото очекување имаме

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{7} kP\{X=k\} = \sum_{k=0}^{7} k\binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \sum_{k=1}^{7} k\binom{7}{k} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^7 \sum_{k=1}^{7} 7\cdot\binom{6}{k-1} = 7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot 2^6 = 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Дисперзијата ќе ја најдеме откако прво ќе го најдеме вториот момент

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{k=0}^{7} k^2P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{7} k^2\binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \sum_{k=2}^{7} k(k-1)\binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \sum_{k=0}^{7} k\binom{7}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^7 \sum_{k=2}^{7} k(k-1)\binom{7}{k} + EX = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \sum_{k=2}^{7} 7\cdot 6\cdot\binom{5}{k-2} + \frac{7}{2} = \\ &= 7\cdot 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot 2^5 + \frac{7}{2} = 7\cdot 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} = 14, \end{aligned}$$

од каде за дисперзијата имаме

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 14 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}.$$

Имено, случајната променлива X има Биномна распределба т.е. $X \sim \mathcal{B}(7, \frac{1}{2})$, од каде и директно $EX = np = 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, а $DX = npq = 7\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{4}$.

4.39. Се изведуваат низа независни испитувања, при што при секое испитување настанот A се реализира со веројатност p, $0 < p < 1$. Испитувањата се изведуваат се додека не се појави настанот A. Нека X е број на изведени испитувања се до појавувањето на настанот A по прв пат. Определи ги EX и DX.

Решение. Случајната променлива X има геометриска распределба со патраметар p т.е. $X \sim Geo(p)$ и нејзиниот закон на распределба е

$$P\{X=k\} = pq^k,\ k = 0, 1, 2, ...,$$

каде $q = 1-p$. За математичкото очекување имаме

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = pq\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial q}(q^k) = pq\frac{\partial}{\partial q}(\sum_{k=1}^{\infty} q^k) = \\ &= pq\frac{\partial}{\partial q}(\frac{q}{1-q}) = pq\,\frac{1}{(1-q)^2} = pq\,\frac{1}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}. \end{aligned}$$

Слично, за вториот момент имаме

$$\begin{aligned}EX^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 pq^k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)pq^k + \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = \\ &= pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + EX = pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial q^2}(q^k) + \frac{1-p}{p} = \\ &= pq^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2}(\sum_{k=2}^{\infty} q^k) + \frac{1-p}{p} = pq^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2}(\frac{q^2}{1-q}) + \frac{1-p}{p} = \\ &= pq^2 \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1-p}{p} = pq^2 \frac{2}{p^3} + \frac{1-p}{p} = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p},\end{aligned}$$

од каде за дисперзијата имаме дека е

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - (\frac{1-p}{p})^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

4.40. Случајната променлива X има Поасонова распределба $\mathcal{P}(a)$, $a > 0$. Определи ги EX и DX.

Решение. Законот на распределба на $X \sim \mathcal{P}(a)$, $a > 0$ е

$$P\{X=k\} = \frac{a^k}{k!}e^{-a},\ k = 0, 1, 2, ...$$

Тогаш, математичкото очекување е

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}e^{-a} = a\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}e^{-a} = a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}e^{-a} = a \cdot 1 = a,$$

затоа што $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}e^{-a} = P\{X \geq 0\} = P(\Omega) = 1$. Понатаму, вториот момент е

$$\begin{aligned}EX^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!}e^{-a} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{a^k}{(k-1)!}e^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{a^{k+1}}{k!}e^{-a} = \\ &= a\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{k!}e^{-a} + a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}e^{-a} = a \cdot EX + a \cdot 1 = a^2 + a,\end{aligned}$$

од каде за дисперзијата имаме

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = a^2 + a - a^2 = a.$$

4.41. Случајните променливи X и Y се независни и имаат Поасонови распределби $\mathcal{P}(a)$, $a > 0$. Определи ги математичкото очекување и дисперзијата на
а) нивниот збир,
б) нивниот производ.

Решение. Од Задача 4.40 имаме дека $EX = DX = EY = DY = a$. Имајќи ја во предвид независноста на X и Y имаме
а) $E(X+Y) = EX + EY = a + a = 2a$, $D(X+Y) = DX + DY = a + a = 2a$.
б) $E(XY) = EX \cdot EY = a \cdot a = a^2$,
$D(XY) = E(XY)^2 - (E(XY))^2 = E(X^2Y^2) - (a^2)^2 = E(X^2)E(Y^2) - a^4 =$
$= (DX + (EX)^2)(DY + (EY)^2) - a^4 = (a + a^2)(a + a^2) - a^4 = a^2 + 2a^3$.

4.42. Просечниот број на телефонски повици за една канцеларија меѓу 9 и 10 часот е 30. Ако бројот на телефонски повици има Поасонова распределба, најди ја веројатноста дека во еден просечен ден меѓу 9:45 и 10:00 часот нема телефонски повици.

Решение. Нека X е број на телефонски повици меѓу 9 и 10 часот. Дадено е дека $EX = 30$, па распределбата на X е $X \sim \mathcal{P}(30)$. Нека Y е број на телефонски повици меѓу 9:45 и 10:00 часот, тогаш и Y има Поасонова распределба, со патаметар $EY = E(X/4) = E((1/4)X) = (1/4)EX = 30/4$, односно, $Y \sim \mathcal{P}(30/4)$. Тогаш, бараната веројатност е

$$P\{Y = 0\} = \frac{(30/4)^0}{0!}e^{-30/4} = e^{-30/4} \approx 0,000553.$$

4.43. Во две кутии се сместени црни и бели топчиња, така што во I кутија има 99 бели и 1 црно топче, а во II кутија има 1 бело и 99 црни топчиња. Се извлекуваат по 5 топчиња одеднаш од двете кутии. Нека X е бројот на бели топчиња во 10-те извлечени топчиња. Најди ги EX, DX, moX и meX.

Решение. Нека X_i е број на извлечени бели топчиња од i-тата кутија, $i = 1, 2$. Тогаш, $X = X_1 + X_2$. Прво, ги бараме распределбите на X_1 и X_2. Случајната променлива X_1 прима вредности $X_1 \in \{4, 5\}$ со веројатности

$$P\{X_1 = 4\} = \frac{C_{99}^4}{C_{100}^5} = \frac{1}{20},\ \{X_1 = 5\} = \frac{C_{99}^5}{C_{100}^5} = \frac{19}{20}.$$

Случајната променлива X_2 прима вредности $X_1 \in \{0, 1\}$ со веројатности

$$P\{X_2 = 0\} = \frac{C_{99}^5}{C_{100}^5} = \frac{19}{20},\ \{X_2 = 1\} = \frac{C_{99}^4}{C_{100}^5} = \frac{1}{20}.$$

За математичките очекувања на X_1 и X_2 имаме

$$EX_1 = 4 \cdot \frac{1}{20} + 5 \cdot \frac{19}{20} = \frac{99}{20},\ EX_2 = 0 \cdot \frac{19}{20} + 1 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{20}.$$

Тогаш,
$$EX = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{99}{20} + \frac{1}{20} = \frac{100}{20} = 5.$$
За дисперзиите на X_1 и X_2 имаме
$$DX_1 = E(X_1^2) - (EX_1)^2 = \Big(4^2 \cdot \frac{1}{20} + 5^2 \cdot \frac{19}{20}\Big) - \Big(\frac{99}{20}\Big)^2 = \frac{491}{20} - \Big(\frac{99}{20}\Big)^2,$$
$$DX_2 = E(X_2^2) - (EX_2)^2 = \Big(0^2 \cdot \frac{19}{20} + 1^2 \cdot \frac{1}{20}\Big) - \Big(\frac{1}{20}\Big)^2 = \frac{1}{20} - \Big(\frac{1}{20}\Big)^2.$$
Случајните променливи X_1 и X_2 се независни, и затоа
$$\begin{aligned} DX &= D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) = \Big(\frac{491}{20} - \Big(\frac{99}{20}\Big)^2\Big) + \Big(\frac{1}{20} - \Big(\frac{1}{20}\Big)^2\Big) = \\ &= \frac{492}{20} - \frac{99^2 + 1}{20^2} = \frac{9840 - 9802}{400} = 0,095. \end{aligned}$$

За да ги најдеме moX и meX, ни треба распределбата на X. Случајната променлива X прима вредности $X \in \{4, 5, 6\}$. Земаме во предвид дека X_1 и X_2 се независни случајни променливи, па распределбата на X е

$$\begin{aligned} P\{X = 4\} &= P\{X_1 + X_2 = 4\} = P\{X_1 = 4, X_2 = 0\} = P\{X_1 = 4\}P\{X_2 = 0\} = \\ &= \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{400}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X = 5\} &= P\{X_1 + X_2 = 5\} = P\{X_1 = 5, X_2 = 0\} + P\{X_1 = 4, X_2 = 1\} = \\ &= P\{X_1 = 5\}P\{X_2 = 0\} + P\{X_1 = 4\}P\{X_2 = 1\} = \\ &= \frac{19}{20} \cdot \frac{19}{20} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{362}{400}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X = 6\} &= P\{X_1 + X_2 = 6\} = P\{X_1 = 5, X_2 = 1\} = P\{X_1 = 5\}P\{X_2 = 1\} = \\ &= \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{19}{400}. \end{aligned}$$

Значи, $moX = 5$, затоа што $P\{X = 5\} = 362/400$ е најголемата веројатност. Исто така, $meX = 5$, затоа што истовремено
$$P\{X \leq 5\} = \frac{19}{400} + \frac{362}{400} \geq \frac{1}{2} \text{ и } P\{X \geq 5\} = \frac{362}{400} + \frac{19}{400} \geq \frac{1}{2}.$$

4.44. Стрелец ја погодува целта со веројатност p $(0 < p < 1)$ при секое независно гаѓање. Тој има n куршуми и гаѓа во целта се додека не ја погоди или не ги потроши сите куршуми. Најди го очекуваниот број на гаѓања.

Решение. Дефинираме случајна променлива X - број на гаѓања во целта, која прима вредности $X \in \{1, 2, ..., n\}$. Нека $q = 1-p$, тогаш законот на распределба на X е

$$P\{X = k\} = q^{k-1}p, \ k = 1, 2, ..., n-1, \ P\{X = n\} = q^{n-1}p + q^n = q^{n-1}.$$

Па, очекуваниот број на гаѓања е

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{n} kP\{X = k\} = \\ &= 1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2p + ... + (n-1) \cdot q^{n-2}p + n \cdot q^{n-1} = \\ &= 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-(1-p)^n}{p}. \end{aligned}$$

Забелешка. Точноста на равенството

$$1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2p + ... + (n-1) \cdot q^{n-2}p + n \cdot q^{n-1} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}$$

се покажува со индукција по n.

4.45. Од кутија во која има 5 бели и 7 црни топчиња, на случаен начин се извлекуваат 6 топчиња одеднаш. Најди ги EX и DX на случајната променлива X - број на извлечени бели топчиња.

Решение. Ако од кутија со n топчиња од кои m се бели, се извлекуваат одеднаш k топчиња, тогаш случајната променлива X - број на извлечени бели топчиња има **хипергеометриска распределба** со параметри n, m, k т.е. нејзиниот закон на распределба е

$$P\{X = i\} = \frac{C_m^i C_{n-m}^{k-i}}{C_n^k}, \ \max\{0, m+k-n\} \leq i \leq \min\{m, k\},$$

од каде математичкото очекување и дисперзијата на X се

$$EX = \frac{km}{n} \text{ и } DX = \frac{km(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)} \text{ (покажи!)}.$$

Така, за $n = 12$, $m = 5$ и $k = 6$ имаме

$$\begin{aligned} EX &= \frac{km}{n} = \frac{6 \cdot 5}{12} = \frac{5}{2} = 2,5, \\ DX &= \frac{km(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot (12-5)(12-6)}{12^2 \cdot (12-1)} = \frac{35}{44} \approx 0,79545. \end{aligned}$$

4.46. Нека X е правилна десетична дропка со три знака по запирката, при што секој знак независно еден од друг, со еднаква веројатност може да прима една од вредностите $0, 1, ..., 9$. Најди го законот на распределба на случајната променлива X и најди го нејзиното математичко очекување.

Решение. Случајната променлива X ги прима вредностите $X \in \{0,000; 0,001; 0,002; ...; 0,999\}$, при што секоја вредност ја прима со веројатност $(\frac{1}{10})^3 = 0,001$, значи X има рамномерна распределба на множеството вредности $\{0,000; 0,001; 0,002; ...; 0,999\}$, односно распределбата е

$$P\{X = x\} = 0,001,\ x \in \{0,000; 0,001; 0,002; ...; 0,999\}.$$

Тогаш, математичкото очекување е

$$\begin{aligned} EX &= 0,001 \cdot (0,000 + 0,001 + 0,002 + ... + 0,999) = \\ &= 0,001 \cdot \frac{0,000 + 0,999}{2} \cdot 1000 = 0,4995 \approx 0,500. \end{aligned}$$

4.47. Една мета се состои од круг бр.1 и два концентрични прстени бр.2 и бр.3. Погодувањето на кругот бр.1 донесува 10 поени, на прстенот бр.2 - 5 поени, на прстенот бр.3 - 1 поен. Веројатноста да стрелецот кој ја погодил метата го погодува кругот бр.1 и прстените бр.2 и бр.3 е 0,5; 0,3; 0,2 соодветно. Нека X е вкупниот број на поени, добиени при 3 погодувања на метата. Најди ги EX, DX, moX, meX.

Решение. *Прв начин.* Дефинираме настани A_i - стрелецот го погодил i-тиот дел, $i = 1, 2, 3$. Стрелецот гаѓа 3 пати, па разгледуваме Полиномиална шема со $n = 3$ и веројатности $p_1 = P(A_1) = 0,5$, $p_2 = P(A_2) = 0,3$ и $p_3 = P(A_3) = 0,2$. Нека B_{k_1,k_2,k_3} - настанот A_i се реализирал точно k_i пати, $i = 1, 2, 3$, при што $k_1 + k_2 + k_3 = n = 3$. Тогаш, случајната променлива X ги прима вредностите $X \in \{10k_1 + 5k_2 + k_3 \mid k_1, k_2, k_3 \in \{0, 1, 2, 3\},\ k_1 + k_2 + k_3 = 3\}$ со веројатности

$$P\{X = 10k_1 + 5k_2 + k_3\} = P(B_{k_1,k_2,k_3}) = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} = \frac{3!}{k_1!k_2!k_3!} 0,5^{k_1} 0,3^{k_2} 0,2^{k_3},$$

за $k_1, k_2, k_3 \in \{0, 1, 2, 3\},\ k_1 + k_2 + k_3 = 3$, односно законот на распределба даден со табела е

x	3	7	11	12	15	16	20	21	25	30
$P\{X = x\}$	0,008	0,036	0,054	0,060	0,027	0,180	0,135	0,150	0,225	0,125

од каде се пресметува дека $EX = 20,1$, $DX = 38,43$, $moX = 25$ и $meX = 20$ и 21, затоа што и за двете вредности (20 и 21) важи

$$P\{X \leq 20\} = 0,5 \geq 0,5 \text{ и } P\{X \geq 20\} = 0,635 \geq 0,5,$$

$$P\{X \leq 21\} = 0,65 \geq 0,5 \text{ и } P\{X \geq 22\} = 0,5 \geq 0,5.$$

Втор начин. Ги дефинираме случајните променливи X_i - поени добиени при i-тото погодување на метата, $i = 1,2,3$. Тогаш, X_1, X_2, X_3 се независни еднакво распределени случајни променливи со распределби

x	1	5	10
$P\{X_i = x\}$	0,2	0,3	0,5

од каде $EX_i = 6,7$ и $DX_i = 12,81$, $i = 1,2,3$. Тогаш, за математичкото очекување на $X = X_1 + X_2 + X_3$ имаме

$$EX = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 20,1,$$

а од независноста на X_1, X_2, X_3 за дисперзијата на X имаме

$$DX = D(X_1 + X_2 + X_3) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) = 38,43.$$

За наоѓање на moX и meX пожелно е да ја имаме распределбата на X. Случајната променлива X прима $\overline{C}_3^3 = C_5^2 = 10$ различни вредности (тоа е бројот на различни збирови од три собироци при што секој собирок прима некоја од вредностите 1, 5, 10). Заради независноста на X_1, X_2, X_3, за распределбата на X имаме

$$P\{X = 3\} = P\{X_1 + X_2 + X_3 = 3\} = P\{(X_1, X_2, X_3) = (1,1,1)\} = 0,2^3 = 0,008,$$

$$\begin{aligned} P\{X = 7\} &= P\{X_1 + X_2 + X_3 = 7\} = \\ &= P\{(X_1, X_2, X_3) \in \{(5,1,1),(1,5,1),(1,1,5)\}\} = \\ &= 3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,3 = 0,036, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X = 11\} &= P\{X_1 + X_2 + X_3 = 11\} = \\ &= P\{(X_1, X_2, X_3) \in \{(1,5,5),(5,1,5),(5,5,1)\}\} = \\ &= 3 \cdot 0,2 \cdot 0,3^2 = 0,054 \text{ и.т.н.} \end{aligned}$$

Се добива истата распределба како и при првиот начин на решавањето на задачата, па одредувањето на moX и meX е на истиот начин како претходно.

4.48. Се изведуваат n независни испитувања во различни услови. Веројатноста за појавување на настанот A во i-тото испитување е p_i, $i = 1,2,...,n$. Нека X е број на појавувања на настанот A при n-те независни испитувања. За да се упростат пресметките, веројатностите p_i, $i = 1,2,...,n$ се заменуваат со $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$. Дали и при замената точно ќе се пресметаат EX и DX?

Решение. Математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X (пред замената на p_i со $\overline{p}$) се

$$EX = \sum_{i=1}^{n} p_i,\ DX = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i,\ q_i = 1 - p_i,\ i = 1, 2, ..., n.\ \text{(покажи!)}$$

По замената на p_i со $\overline{p}$ се добива нова случајна променлива $\overline{X}$ - број на појавувања на настанот A при n-те независни испитувања, каде во секое од n-те испитувања веројатноста за појавување на настанот A е $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$. Значи, $\overline{X}$ има Биномна распределба т.е. $\overline{X} \sim \mathcal{B}(n, \overline{p})$, па математичкото очекување и дисперзијата на $\overline{X}$ се

$$E\overline{X} = n\,\overline{p},\ D\overline{X} = n\,\overline{p}\,\overline{q},\ \overline{q} = 1 - \overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 - p_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Со замена на $\overline{p}$ во $E\overline{X}$ добиваме

$$E\overline{X} = n\,\overline{p} = n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = EX,$$

што значи и по замената на p_i со $\overline{p}$ математичкото очекување останува исто. Со цел да ги споредиме дисперзиите, имаме

$$\begin{aligned} DX - D\overline{X} &= \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - n\,\overline{p}\,\overline{q} = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - n\,\overline{p}\,\overline{q} - n\,\overline{p}\,\overline{q} + n\,\overline{p}\,\overline{q} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \overline{q} - \sum_{i=1}^{n} \overline{p} q_i + n\,\overline{p}\,\overline{q} = \sum_{i=1}^{n}(p_i - \overline{p})(q_i - \overline{q}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i - \overline{p})(1 - p_i - 1 + \overline{p}) = -\sum_{i=1}^{n}(p_i - \overline{p})^2 \le 0, \end{aligned}$$

од каде $DX \le D\overline{X}$, значи со замената на p_i со $\overline{p}$ дисперзијата се зголемува. Имено, таа останува иста само ако $p_1 = p_2 = ... = p_n = \overline{p}$.

4.49. Случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип има густина на распределба $p_X(x)$. Најди го законот на распределба на случајната променлива

$$Y = signX = \begin{cases} 1 & , X > 0 \\ 0 & , X = 0 \\ -1 & , X < 0 \end{cases}$$

како и нејзиното математичко очекување и дисперзија.

Решение. Законот на распределба на Y е

$$\begin{aligned} P\{Y=-1\} &= P\{X<0\} = F_X(0), \\ P\{Y=0\} &= P\{X=0\} = 0, \\ P\{Y=1\} &= P\{X>0\} = 1-F_X(0), \end{aligned}$$

каде $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,du$ е функцијата на распределба на X. Математичкото очекување е

$$EY = (-1)\cdot F_X(0) + 1\cdot(1-F_X(0)) = 1-2F_X(0),$$

вториот момент е

$$EY^2 = (-1)^2\cdot F_X(0) + 1^2\cdot(1-F_X(0)) = 1,$$

од каде за дисперзијата имаме

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = 1-(1-2F_X(0))^2 = 4F_X(0)(1-F_X(0)).$$

4.50. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6 & , x\in(2,4) \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}$$

Најди ги EX, moX и meX.

Решение. Математичкото очекување е

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\,dx = \int_2^4 x(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6)\,dx = 3.$$

Од $p'_X(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0$, добиваме $x=3$, и бидејќи $p''_X(3) = -\frac{3}{2} < 0$, следи дека $p_X(x)$ достигнува максимум во $x=3$ на интервалот $(2,4)$, значи $moX = 3$.

Медијанта на X се наоѓа со решавање на равенката $F_X(x) = 0,5$, односно

$$\begin{aligned} 0,5 &= F_X(x) = P\{X<x\} = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,du = \int_2^x (-\frac{3}{4}u^2 + \frac{9}{2}u - 6)\,du = \\ &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 5,\ 2<x<4, \end{aligned}$$

од каде се добива

$$(x-3)(x-3+\sqrt{3})(x-3-\sqrt{3}) = 0,\ 2<x<4,$$

па $meX = 3$ е единственото решение од интервалот $(2,4)$.

4.51. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x & , x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$$

Најди го математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива $Y = |\sin X|$.

Решение. Математичкото очекување на Y е

$$\begin{aligned} EY &= E|\sin X| = \int_{-\infty}^{\infty} |\sin x| p_X(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos x\, dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \cos x\, dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\, d(\sin x) + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, d(\sin x) = \\ &= -\frac{1}{2}\left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{2}\left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Вториот мимент на Y е

$$\begin{aligned} EY^2 &= E|\sin X|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\sin x|^2 p_X(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{1}{2}\left.\frac{\sin^3 x}{3}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тогаш, дисперзијата на Y е

$$DY = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12}.$$

4.52. Нека случајната променлива X има Гама распределба со параметри $\alpha = \frac{m}{2}$ и $\lambda = \frac{1}{2}$, односно нејзината густина на распределба е

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} & , x > 0 \\ 0 & , \text{инаку} \end{cases}$$

каде е $\gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ е Гама функција (X има Хи-квадрат распределба со m степени на слобода). Определи ги EX и DX.

Решение. Математичкото очекување е

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\, dx = \frac{2}{\Gamma(\frac{m}{2})}\int_0^{\infty} t^{\frac{m}{2}} e^{-t} dt = \frac{2}{\Gamma(\frac{m}{2})}\cdot \Gamma(\frac{m}{2}+1) = m,$$

затоа што $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ за секој $\alpha > 0$. Вториот момент е

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{m}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}\, dx = \frac{4}{\Gamma(\frac{m}{2})}\int_0^{\infty} t^{\frac{m}{2}+1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{4}{\Gamma(\frac{m}{2})}\cdot \Gamma(\frac{m}{2}+2) = \frac{4(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{m}{2})}\cdot \Gamma(\frac{m}{2}+1) = 4(\frac{m}{2}+1)\frac{m}{2} = m^2 + 2m. \end{aligned}$$

Тогаш, дисперзијата е

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = m^2 + 2m - m^2 = 2m.$$

4.53. Нека случајната променлива X има Кошиева распределба, односно нејзината густина на распределба е $p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, за $x \in \mathbb{R}$. Определи ги EX и DX.

Решение. Ќе покажеме дека математичкото очекување не постои. Ја испитуваме апсолутната конвергенција на интегралот

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{1} \frac{dt}{t} + \frac{1}{2\pi}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi}\lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty, \end{aligned}$$

од каде следи дека математичкото очекување не постои, и исто така не постои и дисперзијата.

4.54. Нека X има $\mathcal{N}(0,1)$ распределба. Определи ги моментите на X од произволен ред n.

Решение. Густината на распределба на случајната променлива $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ е $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Моментот на X од ред n, за $n = 2k+1$ е

$$EX^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0,$$

зарди непарноста на подинтегралната функција и интегрирање над симетричен интервал. Кога $n = 2k$, ја изведуваме формулата со математичка индукција,

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= DX + (EX)^2 = 1 + 0^2 = 1 = 1!! \\
EX^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx) = \\
&= 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 3EX^2 = 3\cdot 1 = 3!!
\end{aligned}
$$

Претпоставуваме дека $EX^{2k} = (2k-1)!!$, тогаш за $n = 2k+2$ имаме

$$
\begin{aligned}
EX^{2k+2} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + (2k+1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx) = \\
&= (2k+1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = (2k+1)EX^{2k} = \\
&= (2k+1)\cdot(2k-1)!! = (2k+1)!!
\end{aligned}
$$

Значи,

$$
EX^n = \begin{cases} 0 & , n = 2k+1 \\ (n-1)!! & , n = 2k \end{cases}
$$

4.55. Една монета се фрла 3 пати. Доколку при секое од трите фрлања падне иста страна, се фрла уште еднаш. Нека X е број на паднати "грбови", а Y е број на фрлања. Најди го коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$. Дали X и Y се независни случајни променливи?

Решение. Просторот од елементарни настани е $\Omega = \{$(п,п,п,п),(п,п,п,г),(п,п,г), (п,г,п),(г,п,п),(п,г,г),(г,п,г),(г,г,п),(г,г,г,п),(г,г,г,г)$\}$, при што не се сите елементарни настани еднакловеројатни. Знаејќи дека веројатноста за појавување на "пара", односно "грб" при едно фрлање на монетата е $\frac{1}{2}$ и заради независноста на фрлањата имаме дека $P\{$(п,п,г)$\} = P\{$(п,г,п)$\} = P\{$(г,п,п)$\} = P\{$(п,г,г)$\} = P\{$(г,п,г)$\} = P\{$(г,г,п)$\} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ и $P\{$(п,п,п,п)$\} = P\{$(п,п,п,г)$\} = P\{$(г,г,г,п)$\} = P\{$(г,г,г,г)$\} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$.

Случајните променливи X и Y примаат вредности $X \in \{0,1,2,3,4\}$ и $Y = \{3,4\}$ соодветно, па распределбата на случајниот вектор (X,Y) е

$$
\begin{aligned}
P\{X=0, Y=3\} &= 0, \\
P\{X=0, Y=4\} &= P\{\text{(п,п,п,п)}\} = \frac{1}{16}, \\
P\{X=1, Y=3\} &= P\{\text{(п,п,г),(п,г,п),(г,п,п)}\} = 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{6}{16},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
P\{X=1,Y=4\} &= P\{(\text{п,п,п,г})\} = \frac{1}{16},\\
P\{X=2,Y=3\} &= P\{(\text{п,г,г}),(\text{г,п,г}),(\text{г,г,п})\} = 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{6}{16},\\
P\{X=2,Y=4\} &= 0,\\
P\{X=3,Y=3\} &= 0,\\
P\{X=3,Y=4\} &= P\{(\text{г,г,г,п})\} = \frac{1}{16},\\
P\{X=4,Y=3\} &= 0,\\
P\{X=4,Y=4\} &= P\{(\text{г,г,г,г})\} = \frac{1}{16},
\end{aligned}$$

или со табела

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4
3	0	6/16	6/16	0	0
4	1/16	1/16	0	1/16	1/16

Од тука, маргиналните закони на распределба на X и Y се (сумирањето е по колони, односно редици)

x	0	1	2	3	4
$P\{X=x\}$	1/16	7/16	6/16	1/16	1/16

y	3	4
$P\{Y=y\}$	12/16	4/16

Тогаш, $EX=26/16$, $EX^2=56/16$, $DX=55/64$, $EY=52/16$, $EY^2=172/16$, $DY=3/16$. Додека за $E(XY)$ имаме

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_i\sum_j x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_j\} =\\
&= 0\cdot3\cdot0+0\cdot4\cdot\frac{1}{16}+1\cdot3\cdot\frac{6}{16}+1\cdot4\cdot\frac{1}{16}+2\cdot3\cdot\frac{6}{16}+\\
&\quad +2\cdot4\cdot0+3\cdot3\cdot0+3\cdot4\cdot\frac{1}{16}+4\cdot3\cdot0+4\cdot4\cdot\frac{1}{16}=\frac{86}{16}.
\end{aligned}$$

Па, коефициентот на корелација е

$$\rho(X,Y)=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DXDY}}=\frac{\frac{86}{16}-\frac{26}{16}\cdot\frac{52}{16}}{\sqrt{\frac{55}{64}\cdot\frac{3}{16}}}=\frac{13\sqrt{165}}{660}\approx 0,25301.$$

Случајните променливи X и Y не се независни. Имено,

$$P\{X=0,Y=3\}=0\neq\frac{1}{16}\cdot\frac{12}{16}=P\{X=0\}P\{Y=3\}.$$

4.56. Три топчиња на случаен начин се разместуваат во три кутии A, B и C. Ако X е бројот на топчиња во кутијата A, а Y е бројот на празни кутии, најди го коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$. Дали X и Y се независни случајни променливи?

Решение. Со (a,b,c) го означуваме елементарниот настан - во кутијата A има a топчиња, во кутијта B има b топчиња и во кутијата C има c топчиња. Тогаш, просторот од елементарни настани е $\Omega = \{(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3),(2,1,0),(2,0,1),(0,2,1),(1,2,0),(1,0,2),(0,1,2),(1,1,1)\}$, при што не се сите елементарни настани еднакво веројатни. Разместувањето на топчината во кутиите може да се разгледува како доделување на кутија на секое од топчињата. Доделувањето е случајно, еднакровероjатно може да се додели секоја од кутиите A, B, C (со веројатност 1/3) и независно. Затоа, $P\{(3,0,0)\} = P\{(0,3,0)\} = P\{(0,0,3)\} = (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$, $P\{(2,1,0)\} = P\{(2,0,1)\} = P\{(0,2,1)\} = P\{(1,2,0)\} = P\{(1,0,2)\} = P\{(0,1,2)\} = \frac{3!}{2!1!}(\frac{1}{3})^2\frac{1}{3} = \frac{3}{27}$, $P\{(1,1,1)\} = \frac{3!}{1!1!1!}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{6}{27}$.

Множествата вредности на случајните променливи X и Y соодветно се $X \in \{0,1,2,3\}$ и $Y = \{0,1,2\}$. За распределбата на случајниот вектор (X,Y) имаме

$$\begin{aligned}
P\{X=0,Y=0\} &= 0,\\
P\{X=0,Y=1\} &= P\{(0,2,1),(0,1,2)\} = 2\cdot\frac{3}{27} = \frac{6}{27},\\
P\{X=0,Y=2\} &= P\{(0,3,0),(0,0,3)\} = 2\cdot\frac{1}{27} = \frac{2}{27},\\
P\{X=1,Y=0\} &= P\{(1,1,1)\} = \frac{6}{27},\\
P\{X=1,Y=1\} &= P\{(1,2,0),(1,0,2)\} = 2\cdot\frac{3}{27} = \frac{6}{27},\\
P\{X=1,Y=2\} &= 0, \text{ и.т.н.}
\end{aligned}$$

или со табела

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	6/27	2/27
1	6/27	6/27	0
2	0	6/27	0
3	0	0	1/27

Од тука, маргиналните закони на распределба на X и Y се (сумирањето е по редици, односно колони)

x	0	1	2	3
$P\{X=x\}$	8/27	12/27	6/27	1/27

y	0	1	2
$P\{Y=y\}$	6/27	18/27	3/27

Тогаш, $EX = 1$, $EY = 24/27$, $E(XY) = 24/27$, па коваријансата на X и Y е

$$cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = \frac{24}{27} - 1 \cdot \frac{24}{27} = 0,$$

од каде заклучуваме дека, коефициентот на корелација е

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = 0.$$

Но, случајните променливи X и Y не се независни (иако $\rho(X,Y) = 0$). Имено,

$$P\{X = 0, Y = 0\} = 0 \neq \frac{8}{27} \cdot \frac{6}{27} = P\{X = 0\}P\{Y = 0\}.$$

4.57. Даден е законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) со следната табела

$X \backslash Y$	1	3	10
2	3/47	2/47	9/47
4	7/47	8/47	5/47
5	1/47	4/47	8/47

а) Најди ги условните закони на распределба на X и Y при зададени вредности на Y и X, соодветно.

б) Најди ги веројатностите $P\{X \leq 4|Y = 3\}$ и $P\{Y > 1|X > 2\}$.

в) Најди ги законите на распределба на случајните променливи $E(X|Y)$ и $E(Y|X)$.

Решение. Маргиналните закони на распределба на X и Y соодветно се (сумирањето е по редици, односно колони)

x	2	4	5
$P\{X = x\}$	14/47	20/47	13/47

y	1	3	10
$P\{Y = y\}$	11/47	14/47	22/47

а) Условниот закон на распределба на X при услов $Y = 1$ е

$$\begin{aligned} P\{X = 2|Y = 1\} &= \frac{P\{X = 2, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} = \frac{\frac{3}{47}}{\frac{11}{47}} = \frac{3}{11}, \\ P\{X = 4|Y = 1\} &= \frac{P\{X = 4, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} = \frac{\frac{7}{47}}{\frac{11}{47}} = \frac{7}{11}, \\ P\{X = 5|Y = 1\} &= \frac{P\{X = 5, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} = \frac{\frac{1}{47}}{\frac{11}{47}} = \frac{1}{11}, \end{aligned}$$

или со табела

x	2	4	5
$P\{X=x\|Y=1\}$	$3/11$	$7/11$	$1/11$

Слично се добиваат останатите условни закони на распределба на X при зададени вредности на Y т.е.

x	2	4	5
$P\{X=x\|Y=3\}$	$2/14$	$8/14$	$4/14$

x	2	4	5
$P\{X=x\|Y=10\}$	$9/22$	$5/22$	$8/22$

Условните закони на распределба на Y при зададени вредности на X се

y	1	3	10
$P\{Y=y\|X=2\}$	$3/14$	$2/14$	$9/14$

y	1	3	10
$P\{Y=y\|X=4\}$	$7/20$	$8/20$	$5/20$

y	1	3	10
$P\{Y=y\|X=5\}$	$1/13$	$4/13$	$8/13$

б) $P\{X\leq 4|Y=3\}=P\{X=2|Y=3\}+P\{X=4|Y=3\}=\frac{2}{14}+\frac{8}{14}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$, $P\{Y>1|X>2\}=P\{Y\in\{3,10\}|X\in\{4,5\}\}=\frac{P\{Y\in\{3,10\},X\in\{4,5\}\}}{P\{X\in\{4,5\}\}}=\frac{P\{Y=3,X=4\}+P\{Y=3,X=5\}+P\{Y=10,X=4\}+P\{Y=10,X=5\}}{P\{X=4\}+P\{X=5\}}=\frac{\frac{8}{47}+\frac{4}{47}+\frac{5}{47}+\frac{8}{47}}{\frac{20}{47}+\frac{13}{47}}=\frac{25}{33}$.

в) Условното математичко очекување $E(X|Y)$ прима вредности $E(X|Y=y_j)$ со веројатности $P\{Y=y_j\}$, $y_j\in\{1,3,10\}$. Вредностите $E(X|Y=y_j)$ се математички очекувања на условните случајни променливи чии условни распределби ги изведовме погоре. Па, затоа

$$\begin{aligned} E(X|Y=1) &= 2\cdot\frac{3}{11}+4\cdot\frac{7}{11}+5\cdot\frac{1}{11}=\frac{39}{11}, \\ E(X|Y=3) &= 2\cdot\frac{2}{14}+4\cdot\frac{8}{14}+5\cdot\frac{4}{14}=4, \\ E(X|Y=10) &= 2\cdot\frac{9}{22}+4\cdot\frac{5}{22}+5\cdot\frac{8}{22}=\frac{39}{11}, \end{aligned}$$

односно $E(X|Y)$ прима само две вредности $\frac{39}{11}$ и 4 со веројатности

$$\begin{aligned} P\{E(X|Y)=\frac{39}{11}\} &= P\{Y=1\}+P\{Y=10\}=\frac{11}{47}+\frac{22}{47}=\frac{33}{47}, \\ P\{E(X|Y)=4\} &= P\{Y=3\}=\frac{14}{47}, \end{aligned}$$

или со табела

x	$39/11$	4
$P\{E(X\|Y)=x\}$	$33/47$	$14/47$

На сличен начин се добива и распределбата на $E(Y|X)$ дадена со табелата

y	$81/20$	$99/14$	$93/13$
$P\{E(Y\|X)=y\}$	$20/47$	$14/47$	$13/47$

4.58. Од множеството $\{1,2,...,n\}$ на случаен начин се избира број X, а потоа од множеството $\{1,2,...,X\}$ на случаен начин се избира број Y. Нека $U = X+Y$ и $V = X-Y$. Најди ја распределбата на случајниот вектор (U,V) и коваријансата $cov(U,V)$.

Решение. Множеството од елементарни настани е $\Omega = \{(x,y)|1 \leq y \leq x \leq n\}$, при што $P\{(X,Y)=(x,y)\} = P\{X=x\}P\{Y=y|X=x\} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x}$.

Вредностите кои ги примаат новите случајни променливи $U = X+Y$ и $V = X-Y$ се $U \in \{2,3,...,2n\}$ и $V \in \{0,1,...,n-1\}$. Законот на распределба на случајниот вектор (U,V) е

$$P\{U=u,V=v\} = P\{X+Y=u,X-Y=v\} = P\{X=\frac{u+v}{2},Y=\frac{u-v}{2}\} = \frac{2}{n(u+v)},$$

кога $1 \leq \frac{u-v}{2} \leq \frac{u+v}{2} \leq n$.

Понатаму, бидејќи

$$\begin{aligned} cov(U,V) &= E(UV) - EUEV = \\ &= E((X+Y)(X-Y)) - E(X+Y)E(X-Y) = \\ &= E(X^2-Y^2) - (EX+EY)(EX-EY) = \\ &= (EX^2-EY^2) - ((EX)^2-(EY)^2) = \\ &= (EX^2-(EX)^2) - (EY^2-(EY)^2) = DX - DY, \end{aligned}$$

потребно е да се најдат дисперзиите на X и Y.

Случајната променлива X има рамномерна распределба на множеството $\{1,2,...,n\}$ т.е. $P\{X=x\} = \frac{1}{n}$, $x=1,2,...,n$, па затоа $DX = \frac{n^2-1}{12}$. (покажи!)

При услов $X=x$, случајната променлива Y има рамномерна распределба на $\{1,2,...,x\}$ т.е. $P\{Y=y|X=x\} = \frac{1}{x}$, $y=1,2,...,x$, од каде условното математичко очекување на Y при зададена вредност $X=x$ е $E(Y|X=x) = \frac{x+1}{2}$ (покажи!), додека условниот втор момент на Y при зададена вредност $X=x$ е $E(Y^2|X=x) = \frac{(x+1)(2x+1)}{6}$. (покажи!)

Случајната променлива условно математичко очекување на Y при услов X т.е. $E(Y|X)$ прима вредности $E(Y|X=x) = \frac{x+1}{2}$ со веројатности $P\{X=x\} = \frac{1}{n}$, $x \in \{1,2,...,n\}$ од каде нејзиното математичко очекување е

$$E(E(Y|X)) = \sum_{x=1}^{n} E(Y|X=x)P\{X=x\} = \sum_{x=1}^{n} \frac{x+1}{2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{n+3}{4},$$

од каде

$$EY = E(E(Y|X)) = \frac{n+3}{4}.$$

Случајната променлива условен втор момент на Y при услов X прима вредности $E(Y^2|X=x) = \frac{(x+1)(2x+1)}{6}$ со веројатности $P\{X=x\} = \frac{1}{n}$, $x \in \{1,2,...,n\}$ од каде неговото математичко очекување е,

$$E(E(Y^2|X)) = \sum_{x=1}^{n} E(Y^2|X=x)P\{X=x\} = \sum_{x=1}^{n} \frac{(x+1)(2x+1)}{6} \cdot \frac{1}{n} = \frac{4n^2+15n+15}{36},$$

од каде

$$EY^2 = E(E(Y^2|X)) = \frac{4n^2+15n+15}{36}.$$

Конечно, за дисперзијата на Y се добива

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{4n^2+15n+15}{36} - \left(\frac{n+3}{4}\right)^2 = \frac{7n^2+6n-21}{144},$$

од каде

$$cov(U,V) = DX - DY = \frac{n^2-1}{12} - \frac{7n^2+6n-21}{144} = \frac{5n^2-6n+9}{144}.$$

4.59. Случајниот вектор (X,Y) има $\mathcal{U}((0,1)\times(0,1))$ распределба. Најди го математичкото очекување $E(X|X+Y<1)$.

Решение. Густината на распредлба на случајниот вектор (X,Y) е

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & ,0<x<1,;0<y<1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

Дефинираме нови случајни променливи $U = X$ и $V = X+Y$. Од Задача 4.36 имаме дека густината на распределба на случајниот вектор (U,V) е

$$p_{UV} = \begin{cases} 1 & ,0<u<1,\ u<v<u+1 \\ 0 & ,\text{инаку} \end{cases}$$

и маргиналната густина на распределба на $V = X+Y$ е

$$p_V(v) = \begin{cases} \int_0^v du & ,0<v\le 1 \\ \int_{v-1}^1 du & ,1<v<2 \end{cases} = \begin{cases} v & ,0<v\le 1 \\ 2-v & ,1<v<2 \end{cases}$$

Тогаш, условната густина на распределба на X при услов $X+Y<1$ е

$$\begin{aligned} p_X(x|X+Y<1) &= p_U(x|V<1) = \frac{\int\limits_{0<x<1,\ x<v<x+1,\ v<1} p_{UV}(x,v)\,dv}{\int\limits_{v<1} p_V(v)\,dv} = \\ &= \frac{\int_x^1 dv}{\int_0^1 v\,dv} = 2(1-x),\ 0<x<1, \end{aligned}$$

од каде за математичкото очекување имаме

$$E(X|X+Y<1)=\int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x|X+Y<1)\,dx=\int_0^1 2x(1-x)\,dx=\frac{1}{3}.$$

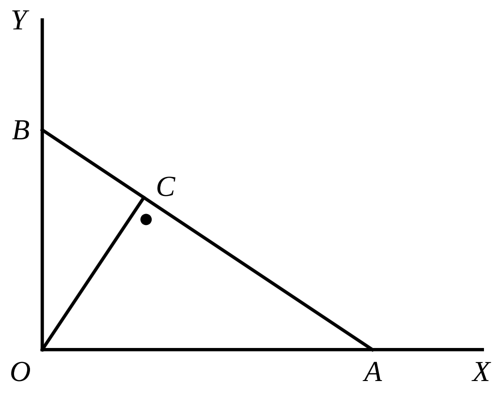
4.60. Крајните точки на отсечката $\overline{AB}=l$ се наоѓаат на краците од правиот агол XOY, при што растојанието X на точката A од темето O на аголот XOY со еднаква веројатност може да прими вредности од интервалот $[0,l]$. Најди ја очекуваната вредност на растојанието Y на темето O до отсечката AB.

Решение. Од услов на задачата имаме дека $X\sim\mathcal{U}[0,l]$, од каде густината на распределба на X е

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{l} & ,x\in[0,l]\\ 0 & ,\text{инаку}\end{cases}$$

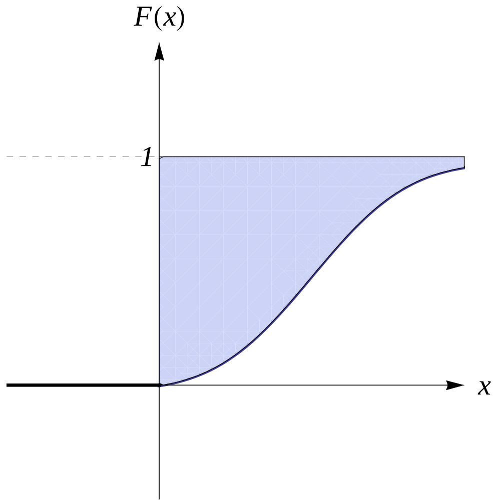
Од сличноста на триаголниците ΔACO и ΔAOB (Цртеж 4.7) имаме $\overline{OC}:\overline{OA}=\overline{OB}:\overline{AB}$, т.е. $Y:X=\sqrt{l^2-X^2}:l$, од каде $Y=X\sqrt{1-(\frac{X}{l})^2}$. Нека $g(x)=x\sqrt{1-(\frac{x}{l})^2}$. Тогаш, очекуваната оддалеченос на темето O од отсечката AB е

$$EY=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x)\,dx=\int_0^l x\sqrt{1-(\frac{x}{l})^2}\cdot\frac{1}{l}\,dx=\frac{l}{2}\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\frac{l}{3}.$$



Цртеж 4.7: Цртеж за задачата 4.60

4.61. Функцијата на распределба $F(x)$ на случајната променлива X од апсолутно непрекинат тип е дадена со графикот на Цртеж 4.8. Покажи дека математичкото очекување геометриски може да биде претставено со плоштината на штрафираниот дел.



Цртеж 4.8: Графикот на функцијата на распределба од задачата 4.61

Решение. Од цртежот имаме дека $F(x) = 0$, за $x < 0$. Нека $p(x)$ е густината на распределба на X, тогаш $p(x) = F'(x)$. За математичкото очекување имаме

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} xF'(x)\, dx = -\int_{0}^{\infty} x(1 - F(x))'\, dx.$$

Со парцијална интеграција $u = x$, $dv = (1 - F(x))'\, dx$ добиваме

$$EX = -\left. x(1 - F(x))\right|_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} (1 - F(x))\, dx.$$

Од конечноста на EX, интегралот $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\ dx = \int_0^{\infty} xp(x)\ dx$ конвергира ($p(x) = 0$, за $x < 0$), од каде $\int_K^{\infty} xp(x)\, dx \to 0$, кога $K \to \infty$. Имаме,

$$0 \leq K(1 - F(K)) = K \int_{K}^{\infty} p(x)\, dx \leq \int_{K}^{\infty} xp(x)\, dx \to 0, \text{ кога } K \to \infty,$$

што значи $\lim_{x\to\infty} x(1-F(x)) = 0$. Конечно, за математичкото очекување имаме

$$EX = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x))\, dx,$$

што геометриски може да се претстави со плоштината на штрафираниот дел од цртежот.

4.5 Карактеристични функции

4.6 Задачи за самостојна работа

4.62. Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е веројатностен простор, каде $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ и $P(w_1) = P(w_3) = \frac{1}{3}$, $P(w_2) = P(w_4) = \frac{1}{6}$. Покажи дека пресликувањето $X : \Omega \to \mathbb{R}$ дадено со $X(w_1) = X(w_2) = 1$, $X(w_3) = X(w_4) = 2$ е случајна променлива. Доколку наместо σ-алгебрата $\mathcal{F}$ се земе σ-алгебрата

а) $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}\}$,

б) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_4\}\}$,

дали повторно пресликувањето X ќе биде случајна променлива?

4.63. Во една кутија од 10 дискети, 8 се исправни. На случаен начин се избираат 2 дискети. Најди го законот на распределба на случајната променлива X - број на исправни дискети меѓу избраните.

4.64. Во една кутија има 7 топчиња од кои 4 бели и 3 црни. Од кутијата на случаен начин одеднаш се извлекуваат 3 топчиња. Нека X е број на извлечени бели топчиња.

а) Најди го законот на распределба на случајната променлива X.

б) Најди ја веројатноста на настанот C - бројот на извлечени бели топчиња е еднаков на бројот на црни топчиња останати во кутијата.

4.65. Во една кутија има n производи од кои еден е дефектен. Од кутијата на случаен начин се извлекува еден по еден производ, без извлечениот да се враќа назад во кутијата, се додека не се извлече дефектниот. Нека X е број на изведени извлекувања. Најди ја распределбата на случајната променлива X.

4.66. Случајната променлива X дадена е со нејзината функција на распределба $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.

а) Најди ја веројатноста дека X прима вредности од интервалот $(0, 1)$.

б) Најди за која вредност на x_1, со веројатност 0,25 случајната променлива X прима вредности не помали од x_1.

4.67. Случајната променлива X има стандардна нормална распределба $\mathcal{N}(0, 1)$. Најди ги веројатностите

а) $P\{-\frac{1}{n} < X < \frac{1}{n}\}$, за $n = 2, 3, 4$,

б)$P\{n < X < n + 1\}$, за $n = 0, 1, 2, 3$,

в) $P\{-1 < X < a\}$, за $n = -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$.

4.68. Случајната променлива X има Поасонова распределба $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Најди ја распределбата на случајната променлива $Y = 2X + 6$.

4.69. Случајната променлива X има густина на распределба $p_X(x)$ на $(0, +\infty)$, и нула во останатиот дел. Најди ја густината на распределба $p_Y(x)$ на случајната променлива Y, ако

а) $Y = e^{-X}$,
б) $Y = \ln X$,
в) $Y = X^3$,
г) $Y = \frac{1}{X^2}$,
д) $Y = \sqrt{X}$.

4.70. Еден стап со должина l на случаен начин се крши на два дела. Најди ја густината на распределба на плоштината на правоаголникот, чии страни имаат должини еднакви на должините на добиените делови од кршењето на стапот.

4.71. Во две кутии се наоѓаат по 3 ливчиња со броевите 0, 1, 2 во I кутија и 0,-1, -2 во II кутија. На случаен начин од секоја од кутиите се извлекува по едно ливче. Нека X е производ на броевите од извлечените ливчиња, а Y е збир на броевите од извлечените ливчиња.
а) Најди го законот на распределба на случајниот вектор (X, Y).
б) Најди ги маргналните закони на распределба на X и Y.

4.72. Случајниот вектор (X, Y) е рамномерно распределен во триаголникот ограничен со правите $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = a$, $a > 0$. Најди ги
а) густината на распределба $p(x, y)$ на (X, Y),
б) функцијата на распределба $F(x, y)$ на (X, Y),
в) маргиналните густини на распределба на X и Y соодветно,
г) функциите на распределба $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ на X и Y соодветно,
д) веројатноста на настанот $X^2 + Y^2 \leq \frac{a^2}{4}$.
Дали X и Y се независни случајни променливи?

4.73. Независните случајни променливи X и Y дадени се со своите густини на распределба $p_X(x) = e^{-x}$, за $x > 0$ и $p_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}$, за $y > 0$ соодветно, односно $X \sim \mathcal{E}(1)$ и $Y \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$. Најди ја распределбата на случајната променлива $X+Y$.

4.74. Случајниот вектор (X_1, X_2) при услов $Y = y$ има $\mathcal{U}((0, y) \times (0, y))$ распределба, а случајната променлива Y има $\mathcal{U}(1, 2)$ распределба. Најди ја условната распределба на Y при услов $(X_1, X_2) = (x_1, x_2)$.

4.75. Случајната променлива X од конечен тип прима две вредности x_1 и x_2, $(x_1 < x_2)$. Веројатноста X да ја прими вредноста x_1 е 0,6. Најди го законот на распределба на X, ако $EX = 1,4$ и $DX = 0,24$.

4.76. Случајната променлива X прима произволни цели позитивни вредности со веројатности кои опаѓаат по геометриска прогресија. Најди ги првиот член и количникот на таа геометриска прогресија, ако $EX = 10$, а потоа пресметај ја веројатноста $P\{X \leq 10\}$.

4.77. Најди ја очекуваната вредност на производот $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$, каде x_k, $k=1,2,...,n$ се случајно избрани броеви од множеството $\{-1,0,1\}$.

4.78. Нека Y е случајна правилна бинарна дропка со n знака по запирката, при што секој знак независно еден од друг, со веројатност $\frac{1}{2}$ прима вредност 0 или 1. Најди го законот на распределба на случајната променлива Y и најди го нејзиното математичко очекување.

4.79. Се фрлаат n коцки за играње. Најди ги математичкото очекување и дисперзијата на збирот на паднатите точки на секоја од коцките.

4.80. Стрелците A, B и C гаѓаат во целта независно еден од друг и секој од нив ја погодува целта со веројатност 0,4. Во кој интервал во однос на очекуваниот број на погодоци се наоѓа вкупниот број на нивни погодоци, со веројатност 0,95, ако секој од нив гаѓа по 50 пати?

4.81. Случајната променлива X дадена е со нејзината густина на распределба

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{a}{2}x & ,0<x\leq 1\\ \frac{a}{2}(2-x) & ,1<x\leq 2\\ 0 & ,\text{инаку}\end{cases}$$

а) Определи ја вредноста на $a\in\mathbb{R}$ и веројатноста $P\{X>\frac{1}{4}\mid X<\frac{1}{2}\}$.

б) Најди ги математичкото очекување и дисперзијата за случајната променлива $Y=\frac{1}{X}$.

4.82. Случајната променлива X има густина на распределба

$$p_X(x)=\begin{cases}2\cos 2x & ,x\in(0,\frac{\pi}{4})\\ 0 & ,\text{инаку}\end{cases}$$

Најди ги moX и meX.

4.83. Нека X има $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ распределба. Определи ги централните моменти на X од произволен ред n.

4.84. Нека X и Y се независни случајни Променливи така што $X\sim\mathcal{U}(-1,3)$ распределба, а $Y=2X-1$.

а) Одреди ја дисперзијата на случајната променлива XY.

б) Најди ја веројатноста $P\{X^2\leq 1-Y\}$.

4.85. Случајниот вектор (X,Y) има густина на распределба

$$p(x,y)=\begin{cases}8xy & ,0<x,y<1\\ 0 & ,\text{инаку}\end{cases}$$

Најди ги математичките очекувања $E(Y|X=\frac{1}{2})$ и $E(Y|X\in(\frac{1}{4},\frac{3}{4}))$.

4.86. Правоаголник со страни a и b случајно се фрла на рамнина, така што сите вредности на аголот α, што го зафаќа страната a со оската Ox се еднакво веројатни. Најди го математичкото очекување на проекцијата на правоаголникот на оската Ox.

Одговори

4.62 Да; Не; **4.63** $P\{X=0\}=1/45$, $P\{X=1\}=16/45$, $P\{X=2\}=28/45$; **4.64** $P\{X=0\}=1/35$, $P\{X=1\}=12/35$, $P\{X=2\}=18/35$, $P\{X=3\}=4/35$; 1; **4.65** $P\{X=x\}=1/n$, $x=1,2,...,n$; **4.66** 1/4, 1; **4.67** а) 0,38292; 0,25860; 0,19742; б) 0,34134; 0,13591; 0,02140; 0,00132; в) 0,06797; 0,14988; 0,24263; **4.68** $P\{Y=y\}=\lambda^{\frac{y-6}{2}}e^{-\lambda}/(\frac{y-6}{2})!$, $y=6,8,10,12,14,...$; **4.69** а) $p_Y(x)=\frac{1}{x}p_X(\ln\frac{1}{x})$, $0<x<1$; б) $p_Y(x)=e^x p_X(e^x)$, $-\infty<x<+\infty$; в) $p_Y(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}p_X(\sqrt[3]{x})$, $0<x<+\infty$; г) $p_Y(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}p_X(\frac{1}{\sqrt{x}})$, $0<x<+\infty$; д) $p_Y(x)=2xp_X(x^2)$, $0<x<+\infty$; **4.70** $p(x)=2/(l\sqrt{l^2-4x})$, $0<x<l^2/4$; **4.71** $P\{X=-4,Y=0\}=P\{X=-2,Y=-1\}=P\{X=-2,Y=1\}=P\{X=-1,Y=0\}=P\{X=0,Y=y\}=1/9$, $y=-2,-1,0,1,2$; **4.72** $p(x,y)=2/a^2$, за $(x,y)\in T$; $F(x,y)=0$, за $x\leq 0$ или $y\leq 0$; $F(x,y)=2xy/a^2$, за $0<x\leq a$, $0<y\leq a-x$; $F(x,y)=1-(1-x/a)^2-(1-y/a)^2$, за $0<x\leq a$, $a-x<y\leq a$; $F(x,y)=1-(1-x/a)^2$, за $0<x\leq a$, $0>a$; $F(x,y)=1-(1-y/a)^2$, за $x>a$, $0<y\leq a$; $F(x,y)=1$, за $x>a$, $y>a$; $p_X(x)=2(a-x)/a^2$, за $0<x\leq a$; $p_Y(x)=2(a-y)/a^2$, за $0<y\leq a$; $F_X(x)=0$, за $x\leq 0$; $F_X(x)=1-(1-x/a)^2$, за $0<x\leq a$; $F_X(x)=1$, за $x>a$; $F_Y(y)=0$, за $y\leq 0$; $F_Y(y)=1-(1-y/a)^2$, за $0<y\leq a$; $F_Y(y)=1$, за $y>a$; $\pi/8\approx 0,392699$; X и Y не се независни; **4.73** $p_{X+Y}(u)=e^{-u/2}(1-e^{-u/2})$, за $u>0$; **4.74** $p(y|x_1,x_2)=2/y^2$, за $0<x_1<1$, $0<x_2<1,1<y<2$; $p(y|x_1,x_2)=2x_1/(y^2(2-x_1))$, за $0<x_2<x_1<y<2$; $p(y|x_1,x_2)=2x_2/(y^2(2-x_2))$, за $0<x_1<x_2<y<2$; **4.75** $P\{X=1\}=0,6$, $P\{X=2\}=0,4$; **4.76** 0,1; 0,9; 0,65132; **4.77** 1; **4.78** $P\{Y=y\}=1/2^n$, $y=0.00...00,...,0.11...11$; $0,5-1/2^{n+1}$; **4.79** $7n/2$, $35n/12$; **4.80** $[48,74;71,26]$; **4.81** а) 2; 3/4; б) $EY=2\ln 2$; DY не постои; **4.82** moX не постои; $meX=\pi/12$; **4.83** 0 за n-непарен; $\sigma^n(n-1)!!$ за n-парен; **4.84** а) 130/3; б) 9/32; **4.85** 7/9; 173/220; **4.86** $2(a+b)/\pi$;

5

Гранични теореми

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е простор на веројатност.

5.1 Низи од случајни променливи

5.2 Неравенство на Чебишев. Закон на големите броеви

5.3 Централна гранична теорема

5.4 Задачи за самостојна работа

Одговори

Прилози

A Таблици[1]

[1]Таблиците во овој дел се превземени од J.Mališić, Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primenama, Peto izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, (1990)

Таблица 1: Вредности на функцијата $y = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$

k \ a	0,1	0.2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0.904837	0.818731	0,740818	0.670320	0,606531	0,548812
1	0.090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0.033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0.000151	0.001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0.000055	0.000250	0.000715	0,001580	0,002964
5		0.000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000103

k \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0.365913	0,367879	0.270671	0.149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0.049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0.000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,0˙0409
7	0.000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0.000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,001001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

Таблица 1: (продолжение)

k \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22				0,000003	0,000022	0,000108
23				0,000001	0,000008	0,000042
24					0,000003	0,000016
25					0,000001	0,000006
26						0,000002
27						0,000001

Таблица 2: Вредности на функцијата $y = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

m \ a	0.1	0.2	0.3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,995321	0,982477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996390	0,992074	0,985612	0,977885
3	0,999996	0,999943	0,999724	0,999224	0,998248	0,997642
4	1,000000	0,999998	0,999974	0,999939	0,999828	0,999606
5	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997
7	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

k \ a	0.7	0.8	0.9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,844195	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,199148
2	0,965858	0,952577	0,937144	0,919699	0,676677	0,423190
3	0,994246	0,990920	0,988542	0,981012	0,857124	0,647232
4	0,999214	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,815263
5	0,999909	0,999816	0,999658	0,999406	0,983437	0,916082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,999917	0,995467	0,966491
7	0,999998	0,999999	0,999997	0,999990	0,998904	0,988095
8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999763	0,996196
9				1,000000	0,995954	0,998897
10					0,999992	0,999707
11					0,999999	0,999928
12					1,000000	0,999983
13						0,999996
14						0,999999
15						1,000000

Таблица 2: (продолжение)

m \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,091579	0,040428	0,017352	0,007295	0,003019	0,001234
2	0,238105	0,124652	0,061970	0,029636	0,013754	0,006232
3	0,433472	0,265026	0,151205	0,081765	0,042380	0,021228
4	0,628839	0,440493	0,285058	0,172991	0,099632	0,054963
5	0,785132	0,615960	0,445681	0,300708	0,191236	0,115690
6	0,889326	0,762183	0,606304	0,449711	0,313374	0,206780
7	0,948866	0,866628	0,743981	0,598714	0,452961	0,323896
8	0,978636	0,931806	0,847239	0,729091	0,592548	0,455652
9	0,991867	0,968172	0,916077	0,830496	0,716625	0,587408
10	0,997159	0,986205	0,957380	0,901479	0,815887	0,705988
11	0,999084	0,994547	0,979909	0,946650	0,888077	0,803008
12	0,999726	0,997981	0,991173	0,973000	0,936204	0,875773
13	0,999923	0,999202	0,996372	0,987188	0,965820	0,926149
14	0,999979	0,999774	0,998600	0,994282	0,982744	0,958534
15	0,999994	0,999931	0,999491	0,997593	0,991770	0,977964
16	0,999998	0,999980	0,999825	0,999041	0,996283	0,988894
17	0,999999	0,999994	0,999943	0,999637	0,998407	0,994680
18	0,999999	0,999998	0,999982	0,999869	0,999351	0,997573
19	0,999999	0,999999	0,999994	0,999955	0,999748	0,998943
20	1,000000	0,999999	0,999998	0,999985	0,999907	0,999560
21		1,000000	0,999999	0,999995	0,999967	0,999824
22			0,999999	0,999998	0,999989	0,999932
23			1,000000	0,999999	0,999997	0,999974
24				0,999999	0,999999	0,999990
25				1,000000	0,999999	0,999996
26					1,000000	0,999998
27						0,999999
28						1,000000

Таблица 3: Вредности на функцијата $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2686
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1134	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0330	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0651	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 4: Вредности на функцијата $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07152	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26738	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29678	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32380	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	40993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

В Некои поважни распределби

распределба	закон на распределба или густина на распределба	EX	DX	$\varphi_X(t)$
$X = I_A$, каде $p = P(A)$	$P\{X=0\} = 1-p$, $P\{X=1\} = p$	p	$p(1-p)$	$1 - p + p\, e^{it}$
Рамномерна (дискр.) на $\{1, ..., n\}$	$P\{X=k\} = \frac{1}{n}$, $k = 1, ..., n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it}-e^{itn}}{n(1-e^{it})}$
Биномна, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, ..., n,\ q = 1-p$	np	npq	$(p\, e^{it} + q)^n$
Геометриска, $X \sim Geo(p)$	$P\{X=k\} = pq^k$, $k = 0, 1, 2, ...,\ q = 1-p$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-q\, e^{it}}$
Поасонова, $X \sim \mathcal{P}(a),\ a > 0$	$P\{X=k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$, $k = 0, 1, 2, ...$	a	a	$e^{a(e^{it}-1)}$
Хипергеометриска, $X \sim HGeo(n, m, k)$	$P\{X=i\} = \frac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}}{\binom{n}{k}}$, $\max\{0, m+k-n\} \le i \le \min\{m, k\}$	$\frac{km}{n}$	$\frac{km(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}$	
Рамномерна (непрек.), $X \sim \mathcal{U}(a,b)$	$p(x) = \frac{1}{b-a}$, $a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Нормална, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < +\infty$	m	σ^2	$e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Стандардна нормална, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < +\infty$	0	1	$e^{-\frac{t^2}{2}}$
Експоненцијална, $X \sim \mathcal{E}(\lambda),\ \lambda > 0$	$p(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}it}$
Гама, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda),\ \alpha, \lambda > 0$	$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$(1 - \frac{1}{\lambda}it)^{-\alpha}$
Хи-квадрат, $X \sim \chi^2_n,\ n \in \mathbb{N}$	$p(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}$, $x > 0$	n	$2n$	$(1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$
Кошиева, $X \sim k(\lambda),\ \lambda > 0$	$p(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$	-	-	$e^{-\lambda\|t\|}$

Литература

[1] Е. С. Вентецель, Л. А. Овчаров, *Прикладные задачи теории вероятностей,* Радио и связь, Москва (1983)

[2] Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика,* Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1969)

[3] П. Младеновић, *Вероватноћа и статистика,* Математички факултет, Београд (2005)

[4] Ф. Мостеллер, *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями,* Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1975)

[5] Z. Glišić, P. Peruničić, *Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike*, Naučna knjiga, Beograd (1982)

[6] R. Isaac, *The pleasures of probability*, Springer, New York (1995)

[7] J. Mališić, *Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primenama*, Peto izdanje, Građevinska knjiga, Beograd (1990)

[8] H. Tijms, *Understanding probability. Chance rules in everyday life*, Second edition, Cambridge university press, Cambridge (2007)